

ELECTRICAL ENGINEERING MATHEMATICS

คณิศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า



ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญทัน ศรีบุญเรือง
สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

คำนำ

ตำราคณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้าเล่มนี้ เรียบเรียงขึ้นตามหลักสูตรวิศวกรรมไฟฟ้าสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี ที่ผ่านการศึกษาวิชาแคลคูลัสมาแล้ว เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วย ทฤษฎี และการประยุกต์ใช้งานของตัวแปรเชิงซ้อน การวิเคราะห์เวกเตอร์ อนุกรมฟูเรียร์ และการนำไปใช้ในการวิเคราะห์รูปคลื่นไฟฟ้า การแปลงฟูเรียร์ ตลอดจนการแปลงลาปลาซ และการนำไปประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า

การศึกษาคณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้าให้เกิดความเข้าใจอย่างถ่องแท้ นั้น ผู้เรียนจำเป็นต้องหมั่นฝึกฝนทำโจทย์แบบฝึกหัดอย่างสม่ำเสมอ เนื่องจากการอ่านทำความเข้าใจเฉพาะเนื้อหาในตำราเพียงอย่างเดียวอาจไม่เพียงพอ การฝึกทำโจทย์จึงเป็นแนวทางสำคัญที่ช่วยเสริมสร้างความเข้าใจเชิงลึก และเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการศึกษาในระดับที่สูงขึ้นต่อไป

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า ตำราเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อนักศึกษา คณาจารย์ รวมถึงวิศวกร และผู้ที่สนใจ เพื่อนำไปใช้เป็นแนวทางในการศึกษาค้นคว้า และประยุกต์ใช้ในงานด้านวิศวกรรมไฟฟ้าได้อย่างมีประสิทธิภาพ หากมีข้อบกพร่องประการใด ผู้เขียนขอน้อมรับไว้ด้วยความขอบคุณยิ่ง

บุญตัน ศรีบุญเรือง

ผู้เรียบเรียง

1 ตุลาคม 2566

สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
บทที่ 1	จำนวนเชิงซ้อน
1.1 บทนำ	1
1.2 องค์ประกอบของจำนวนเชิงซ้อน	1
1.2.1 ระบบพิกัดฉาก (Rectangular form)	1
1.2.2 ระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar form)	2
1.2.3 ปริมาณของระบบพิกัดฉากและระบบเชิงขั้ว	3
1.3 การบวก และการลบจำนวนเชิงซ้อน	9
1.4 การคูณ และการหารจำนวนเชิงซ้อน	11
1.4.1 การคูณจำนวนเชิงซ้อน (Multiplication of complex numbers)	11
1.4.2 การหารจำนวนเชิงซ้อน	12
1.5 การประยุกต์จำนวนเชิงซ้อนในวงจรไฟฟ้า	17
1.5.1 วงจรไฟฟ้าอนุกรม RL	17
1.5.2 วงจรไฟฟ้าอนุกรม RC	21
1.5.3 วงจรไฟฟ้าแบบอนุกรม RLC	24
1.5.4 วงจรไฟฟ้าแบบขนาน RLC	27
แบบฝึกหัดบทที่ 1	30
เอกสารอ้างอิง	31
บทที่ 2	การวิเคราะห์เวกเตอร์
2.1 บทนำ	32
2.2 ความหมายของสเกลาร์ และเวกเตอร์	32
2.3 การเขียนเวกเตอร์	32
2.4 การรวมเวกเตอร์โดยการวาดรูป	33
2.5 การรวมเวกเตอร์โดยการคำนวณ	40

	หน้า
2.6 การลบเวกเตอร์	48
2.7 เวกเตอร์ 3 มิติบนแกนนอน i, j และ k	51
2.8 การคูณสเกลาร์ และเวกเตอร์	53
2.9 ผลคูณเวกเตอร์ของสองเวกเตอร์	55
2.10 ทิศทางของโคไซน์	61
2.11 เวกเตอร์โปรดัก	63
แบบฝึกหัดบทที่ 2	67
เอกสารอ้างอิง	68
บทที่ 3	อนุกรมฟูรีเยร์
3.1 บทนำ	69
3.2 ฟังก์ชันรายคาบ	69
3.3 อนุกรมฟูรีเยร์สำหรับฟังก์ชันรายคาบ	70
3.4 อนุกรมฟูรีเยร์สำหรับฟังก์ชันไม่ซ้ำคาบ	80
3.5 อนุกรมฟูรีเยร์สำหรับฟังก์ชันคู่	89
3.6 อนุกรมฟูรีเยร์สำหรับฟังก์ชันคี่	95
3.7 อนุกรมฟูรีเยร์สำหรับฟังก์ชันครึ่งคลื่น	97
3.8 การประยุกต์ใช้อนุกรมฟูรีเยร์ในวงจรไฟฟ้า	100
แบบฝึกหัดบทที่ 3	105
เอกสารอ้างอิง	108
บทที่ 4	การแปลงฟูรีเยร์
4.1 บทนำ	109
4.2 นิยามการแปลงฟูรีเยร์	109
4.3 คุณสมบัติของการแปลงฟูรีเยร์	115
4.3.1 คุณสมบัติเชิงเส้น	115
4.3.2 คุณสมบัติการแบ่งเวลา	116
4.3.3 คุณสมบัติของการเลื่อนของเวลา	118

	หน้า
บทที่ 6	
การประยุกต์ใช้ลาปลาซทรานส์ฟอร์มสำหรับวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า	191
6.1 บทนำ	191
6.2 การแปลงลาปลาซกลับของวงจรไฟฟ้าอันดับหนึ่ง	191
6.2.1 วงจรอันดับหนึ่งสำหรับโหลด RL	191
6.2.2 วงจรอันดับหนึ่งสำหรับโหลด RC	200
6.3 การประยุกต์ใช้ลาปลาซทรานส์ฟอร์มสำหรับวงจรไฟฟ้าวงจรอันดับสอง	205
แบบฝึกหัดบทที่ 6	214
เอกสารอ้างอิง	216
บรรณานุกรม	
ดัชนี	
ประวัติผู้เรียบเรียง	

บทที่ 1

จำนวนเชิงซ้อน

1.1 บทนำ

เนื้อหาในบทนี้จะอธิบายเกี่ยวกับ จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number) ซึ่งเป็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีบทบาทสำคัญอย่างมากในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า โดยเฉพาะวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ (AC Circuit) เนื่องจากช่วยให้สามารถคำนวณค่าต่าง ๆ เช่น แรงดัน กระแส และอิมพีแดนซ์ ที่มีทั้งขนาด และมุมเฟสได้อย่างแม่นยำมากขึ้น จำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนแทนได้เป็น 2 รูปแบบหลักได้แก่

- ระบบพิกัดฉาก หรือ เรกแทงกูลาร์ฟอร์ม (Rectangular Form) เป็นการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปของส่วนจริง (Real part) และส่วนจินตภาพ (Imaginary part) ซึ่งเหมาะสำหรับการนำไปใช้ในการบวกและลบ
- ระบบเชิงขั้ว หรือ โพลาร์ฟอร์ม (Polar Form) เป็นการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปของขนาด (Magnitude) และมุมเฟส (Angle) ซึ่งเหมาะสำหรับการนำไปใช้ในการคูณ และการหาร

ทั้งสองรูปแบบนี้สามารถแปลงกลับไปมาระหว่างกันได้ ขึ้นอยู่กับความสะดวกในการนำไปใช้คำนวณในแต่ละสถานการณ์ นอกจากนี้ ในบทนี้ยังจะอธิบายถึงหลักการ และวิธีการคำนวณจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองรูปแบบอย่างละเอียด ครอบคลุมการดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน 4 ประการ ได้แก่ การบวก การลบ การคูณ และการหาร เพื่อให้ผู้เรียนสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าได้อย่างถูกต้อง และมีประสิทธิภาพต่อไป

1.2 องค์ประกอบของจำนวนเชิงซ้อน

1.2.1 ระบบพิกัดฉาก (Rectangular form)

สมการจำนวนเชิงซ้อนที่เขียนในรูปแบบระบบพิกัดฉากหรือเรกแทงกูลาร์ฟอร์ม (Rectangular form) หรือระบบพิกัดฉาก แสดงได้ในสมการที่ (1.1) ที่ประกอบด้วยส่วนจำนวนจริงที่อยู่ในระนาบของแกนจริง และส่วนจินตภาพที่อยู่ในระนาบของแกนตั้ง

$$z = x + jy \quad (1.1)$$

จากสมการที่ (1.1) เมื่อ $j = \sqrt{-1}$

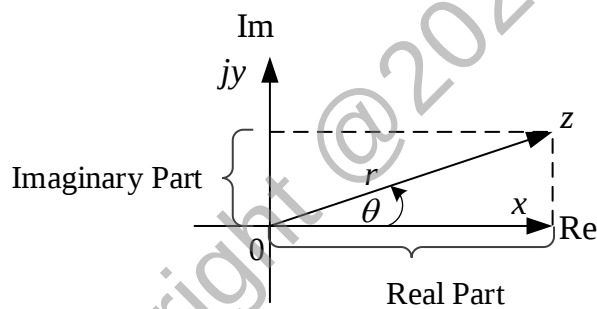
X คือ ส่วนจำนวนจริง (Real part)

Y คือ ส่วนจินตภาพ (Imaginary part)

และสามารถเขียนส่วนของจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพได้ดังสมการที่ (1.2)

$$\begin{cases} x = \text{Re}(z) \\ y = \text{Im}(z) \end{cases} \quad (1.2)$$

จากสมการที่ (1.1) และ (1.2) สามารถแสดงส่วนประกอบต่าง ๆ ได้ดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 กราฟจำนวนเชิงซ้อน

1.2.2 ระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar form)

สมการจำนวนเชิงซ้อนที่เขียนในรูปแบบของระบบพิกัดเชิงขั้วหรือโพลาร์ฟอร์มที่ประกอบด้วยขนาด และมุมแสดงได้ในสมการที่ (1.3) สามารถดูองค์ประกอบได้ดังรูปที่ 1.1

$$z = |z| \angle \theta = r \angle \theta \quad (1.3)$$

เมื่อ r คือ ขนาด

θ คือ มุม

เมื่อค่าขนาด r และ θ หาได้ดังสมการที่ (1.4)

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

หรือสามารถหาค่า x และ y ในรูปแบบตรีโกณมิติดังสมการที่ (1.5)

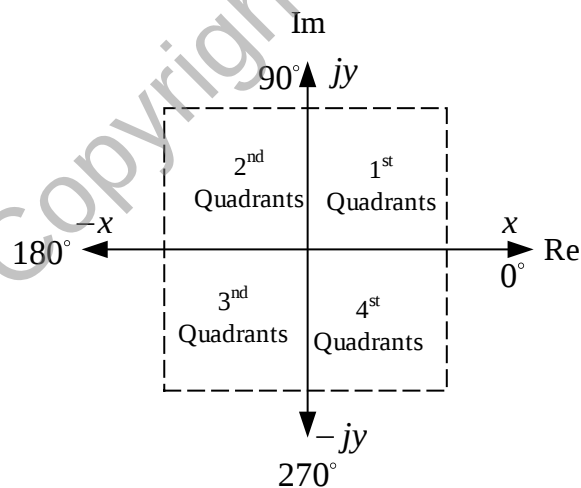
$$\left. \begin{aligned} r &= r \cos \theta \\ x &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

1.2.3 ปริมาณของระบบพิกัดฉากและระบบเชิงขั้ว

จากหัวข้อที่ 1.1.1 และ 1.1.2 สามารถเขียนในรูปของจำนวนเชิงซ้อน (Complex number) ได้สองแบบดังนี้

$$z = \begin{cases} x + jy \\ r \angle \theta \end{cases}$$

และสามารถเขียนสมการของจำนวนเชิงซ้อนได้สี่จุดภาค (Four quadrants) ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 แสดงส่วนของจำนวนจริงกับส่วนจินตภาพ

จากรูปที่ 1.2 สามารถเขียนสมการของทั้ง 4 จุดภาค (Quadrant) ได้ดังนี้ ในจุดภาคที่ 1 แสดงได้ดังสมการที่ (1.6)

$$\left. \begin{aligned} z &= x + jy \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

ในจตุภาคที่ 2 แสดงได้ดังสมการที่ (1.7)

$$\left. \begin{aligned} z &= x + jy \\ \theta &= 180^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

ในจตุภาคที่ 3 แสดงได้ดังสมการที่ (1.8)

$$\left. \begin{aligned} z &= x - jy \\ \theta &= 180^\circ + \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

ในจตุภาคที่ 4 แสดงได้ดังสมการที่ (1.9)

$$\left. \begin{aligned} z &= x - jy \\ \theta &= 360^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

นอกจากนั้นสมการในรูปของจำนวนเชิงซ้อนยังสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential form) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (1.10)

$$z = re^{j\theta} \quad (1.10)$$

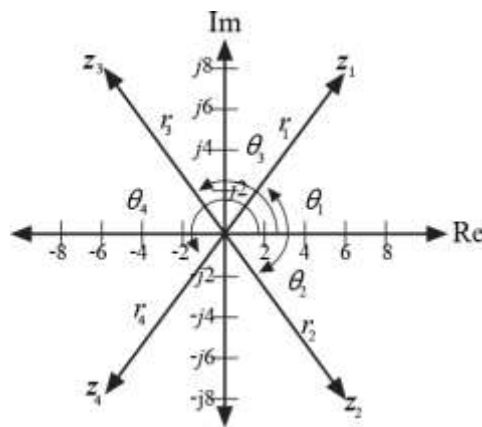
จากสมการที่ (1.10) จะคล้ายกับสมการในรูปแบบของโพลาร์เพราะแสดงทั้งขนาด r และมุม θ

ดังนั้นสามารถสรุปองค์ประกอบของจำนวนเชิงซ้อนได้ดังตารางที่ 1.1

ตารางที่ 1.1 ความสัมพันธ์ของจำนวนเชิงซ้อน

Rectangular form	$z = -x + jy, (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$
Polar Form	$z = r \angle \theta, \left(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right)$
Exponential form	$z = re^{j\theta}, \left(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right)$

ตัวอย่างที่ 1.1 จากรูปที่ 1.3 จงหาค่าในรูปเชิงขั้ว (Polar form) และรูปเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential form)



รูปที่ 1.3 ขนาด และปริมาณจำนวนเชิงซ้อน

- (a) $z_1 = 6 + j8$
- (b) $z_2 = 6 - j8$
- (c) $z_3 = -6 + j8$
- (d) $z_4 = -6 - j8$

วิธีทำ

(a) ตำแหน่งของส่วนจริง และจินตภาพจะอยู่ในจุดภาคที่ 1 สำหรับ $z_1 = 6 + j8$

จากสมการที่ (1.4)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ตำแหน่งของ z_1 อยู่ในจุดภาคที่ 1 และค่ามุมสามารถหาได้จากสมการที่ (1.4)

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

เมื่อแทนค่า $x = 6$ และ $y = 8$ ลงในสมการที่ (1.4) จะได้

$$r_1 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right) = 53.13^\circ$$

ตอบ $z_1 = 10 \angle 53.13^\circ$ ในรูปของ Polar form และ $z_1 = 10e^{j53.13^\circ}$ ในรูปของ Exponential form

(b) ตำแหน่งของส่วนจริง และจินตภาพจะอยู่ในจุดภาคที่ 4 สำหรับ $z_2 = 6 - j8$
จากสมการที่ (1.2)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

เมื่อแทนค่า $x = 6$ และ $y = -8$ ลงในสมการที่ (1.2) จะได้

ตำแหน่งของ z_2 อยู่ในจุดภาคที่ 4 และค่ามุมสามารถหาได้จากสมการที่ (1.9)

$$\theta = 360^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$r_2 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\theta_1 = 360^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right) = 306.87^\circ$$

ตอบ $z_2 = 10 \angle 306.87^\circ$ ในรูปของ Polar form และ $z_1 = 10e^{j306.87^\circ}$ ในรูปของ Exponential form

(c) ตำแหน่งของส่วนจริง และจินตภาพจะอยู่ในจุดภาคที่ 2

สำหรับ $z_3 = -6 + j8$

จากสมการที่ (11.2)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

เมื่อแทนค่า $x = -6$ และ $y = 8$ ลงในสมการที่ (1.2) จะได้

ตำแหน่งของ z_3 อยู่ใน จุดภาคที่ 2 และค่ามุมสามารถหาได้จากสมการที่ (1.7)

$$\theta = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$r_3 = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$$

$$\theta_3 = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right) = 126.87^\circ$$

ตอบ $z_3 = 10 \angle 126.87^\circ$ ในรูปของ Polar form และ $z_3 = 10e^{j126.87^\circ}$ ในรูปของ Exponential form

(d) ตำแหน่งของส่วนจริง และจินตภาพจะอยู่ในจุดภาคที่ 3

สำหรับ $z_4 = -6 - j8$

จากสมการที่ (11.2)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

เมื่อแทนค่า $x = -6$ และ $y = -8$ ลงในสมการที่ (11.2) จะได้

ตำแหน่งของ z_4 อยู่ในจุดภาคที่ 3 และค่ามุมสามารถหาได้จากสมการที่ (1.8)

$$\theta = 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$r_4 = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = 10$$

$$\theta_4 = 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{8}{-6}\right) = 233.13^\circ$$

ตอบ $z_4 = 10 \angle 233.13^\circ$ ในรูปของ Polar form และ $z_4 = 10e^{j233.13^\circ}$ ในรูปของ Exponential form

ตัวอย่างที่ 1.2 จงแปลงค่าจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว และรูปเอกซ์โพเนนเชียล

(a) $z_1 = 12 \angle -60^\circ$

(b) $z_1 = -60 \angle 285^\circ$

วิธีทำ

(a) จากสมการที่ (1.1)

$$z = x + jy, (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$$

สามารถหาค่า x_1 และ y_1 เมื่อแทนค่า r_1 และ $\theta_1 = -60^\circ$ ลงในสมการที่ (1.1) จะได้

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1$$

$$x_1 = 12 \cos(-60^\circ) = 6$$

และ

$$y_1 = r_1 \sin \theta_1$$

$$y_1 = 12 \sin(-60^\circ) = -10.39$$

ดังนั้นจะได้

$$z_1 = x_1 + jy_1$$

ตอบ $z_1 = 6 - j10.39$

(b) จากสมการที่ (1.1)

$$z = x + jy, (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$$

สามารถหาค่า x_2 และ y_2 เมื่อแทนค่า $r_2 = -50^\circ$ และ $\theta_2 = 285^\circ$ ลงในสมการที่ (1.1) จะได้

$$x_2 = r_2 \cos \theta_2$$

$$x_2 = -50 \cos(285^\circ) = -12.94$$

และ

$$y_2 = r_2 \sin \theta_2$$

$$y_2 = 12 \sin(285^\circ) = 48.3$$

ดังนั้นจะได้

$$z_2 = x_2 + jy_2$$

ตอบ $z_2 = -12.94 + j48.3$

ตัวอย่างที่ 1.3 จงแปลงค่าจำนวนเชิงซ้อนในรูปของเชิงขั้ว และรูปเอกซ์โพเนนเชียล

(a) $z_1 = 8e^{j10^\circ}$

(b) $z_2 = 20e^{-j\pi/3}$

วิธีทำ

(a) จากสมการที่ (1.1) และ (1.5)

$$z = x + jy, (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$$

สามารถหาค่า x_1 และ y_1 เมื่อแทนค่า $r_1 = 8$ และ $\theta_1 = 10^\circ$ ลงในสมการที่ (1.1) จะได้

$$\text{ได้ } z_1 = r_1 \cos \theta_1 + jr_1 \sin \theta_1$$

ตอบ $z_1 = r_1 \cos \theta_1 + jr_1 \sin \theta_1$

1.3 การบวก และการลบจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนสามารถบวก หรือลบได้ทั้งส่วนของจำนวนจริง และส่วนของจำนวนจินตภาพ ยกตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $Z_1 = a + jb$ และ $Z_2 = c + jd$ ดังนั้นถ้าเอา $Z_1 + Z_2$ สามารถแสดงการบวกของจำนวนเชิงซ้อนได้ดังสมการที่ (1.11)

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (a + jb) + (c + jd) \\ &= (a + c) + j(b + d) \end{aligned} \quad (1.11)$$

และ การลบสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (1.12)

$$\begin{aligned} Z_1 - Z_2 &= (a + jb) - (c + jd) \\ &= (a - c) + j(b - d) \end{aligned} \quad (1.12)$$

ตัวอย่างที่ 1.4 กำหนดให้ $Z_1 = 2 + j4$ และ $Z_2 = 3 - j$ จงหาค่าต่อไปนี้

- a) $Z_1 + Z_2$
- b) $Z_1 - Z_2$
- c) $Z_2 - Z_1$
- d) จงเขียนเฟสเซอร์ไดอะแกรมของ $Z_1 + Z_2$, $Z_1 - Z_2$, $Z_2 - Z_1$

วิธีทำ

a)

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (2 + j4) + (3 + j) \\ &= (2 + 3) + j(4 + 1) \end{aligned}$$

ตอบ $Z_1 + Z_2 = 5 + j5$

b)

$$\begin{aligned} Z_1 - Z_2 &= (2 + j4) - (3 - j) \\ &= (2 - 3) + j(4 + 1) \end{aligned}$$

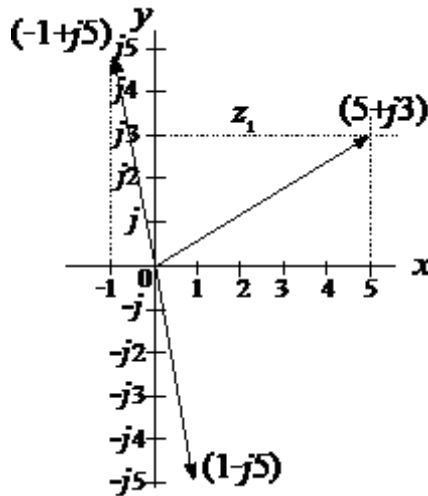
ตอบ $Z_1 - Z_2 = -1 + j5$

c)

$$\begin{aligned} Z_2 - Z_1 &= (3 - j) - (2 + j4) \\ &= (3 - 2) - j(1 + 4) \end{aligned}$$

ตอบ $Z_2 - Z_1 = 1 - j5$

d) แสดงเฟสเซอร์ไดอะแกรม



รูปที่ 1.4 สำหรับการคำนวณของตัวอย่างที่ 1.4

ตัวอย่างที่ 1.5 จงหาผลบวกของ $(40\angle 50^\circ + 20\angle -30^\circ)^{1/2}$

วิธีทำ ใช้การแปลง Rectangular

$$40\angle 50^\circ = 40(\cos 50^\circ + j \sin 50^\circ)$$

เมื่อ

$$= 25.7 + j30.64$$

$$20\angle -30^\circ = 20(\cos(-30^\circ) + j \sin(-30^\circ))$$

$$= 17.32 + j10$$

เมื่อทำการรวมเทอมจะได้

$$40\angle 50^\circ + 20\angle -30^\circ = 47.72\angle 25.63^\circ$$

เมื่อทำการใส่รูท

ตอบ $\sqrt{(40\angle 50^\circ + 20\angle -30^\circ)} = 6.91\angle 12.81^\circ$

ตัวอย่างที่ 1.6 จงหาผลลัพธ์ของ $Z_1 + Z_2 - Z_3$ เมื่อ $Z_1 = 2\angle 30^\circ$, $Z_2 = 5\angle 45^\circ$, $Z_3 = 4\angle 120^\circ$

วิธีทำ ใช้ในการแปลง Rectangular

$$Z_1 = 2\angle 30^\circ = 2(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ)$$

เมื่อ

$$= 1.732 + j1.0$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= 5\angle 45^\circ = 5(\cos(-45^\circ) + j\sin(-45^\circ)) \\ &= 3.536 - j3.536 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_3 &= 4\angle 120^\circ = 4(\cos 120^\circ + j\sin 120^\circ) \\ &= -2.00 + j3.464 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 - Z_3 &= (1.732 + j1.00) + (3.536 - j3.536) - (-2.00 + j3.464) \\ &= 7.268 + j6.000 \end{aligned}$$

หรือ เขียนในรูปของ Polar form จะได้

$$= \sqrt{(7.268)^2 + (6.000)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{6.000}{7.268}\right)$$

ตอบ $Z_1 + Z_2 - Z_3 = 9.425\angle 39.54^\circ$

1.4 การคูณ และการหารจำนวนเชิงซ้อน

1.4.1 การคูณจำนวนเชิงซ้อน (Multiplication of complex numbers)

การคูณจำนวนของซ้อนสามารถคูณอยู่ในรูปของระบบพิกัดฉาก (Rectangular form) ได้โดยจำนวนจริง (Real part) สามารถคูณกับจำนวนเชิงซ้อน (Imaginary part) แสดงดังสมการที่ (1.13)

$$\left. \begin{aligned} Z_1 \times Z_2 &= (a + jb) \times (c + jd) \\ &= ac + jab + jba + j^2 bd \\ &= (ac - bd) + j(ad + bc) \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

เมื่อ $j^2 = -1$

ตัวอย่างที่ 1.7 จงหาค่าของผลคูณ $Z_1 \times Z_2$ เมื่อกำหนดให้ $Z_1 = 3 + j2$ และ $Z_2 = 4 + j5$

วิธีทำ จากโจทย์ เมื่อ $a = 3, b = 2, c = 4, d = 5$

จากสมการที่ (1.13)

$$Z_1 \times Z_2 = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าในสมการที่ (1.13) จะได้

$$\begin{aligned} Z_1 \times Z_2 &= (3 + j2) \times (4 + j5) \\ &= 12 - j5 + j8 - j^2 10 \end{aligned}$$

$$= (12 - (-10)) + j(-15 + 8)$$

ตอบ $Z_1 \times Z_2 = 22 - j7$

การคูณจำนวนของซ้อนสามารถคูณอยู่ในรูปของระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar form) โดยขนาดคูณกับขนาด และมุมนำมาบวกกันดังสมการที่ (1.14)

$$\left. \begin{aligned} Z_1 \times Z_2 &= (|Z_1| \angle \theta_1)(|Z_2| \angle \theta_2) \\ &= |Z_1| \cdot |Z_2| \angle (\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

ตัวอย่างที่ 1.8 จงหาค่าของผลคูณ $Z_1 \times Z_2$ เมื่อ กำหนดให้ $Z_1 = 3.61 \angle 56.31^\circ$ และ

$$Z_2 = 5.83 \angle 59.04^\circ$$

วิธีทำ จากโจทย์ เมื่อ $|Z_1| = 3.61 \angle 56.31^\circ, Z_2 = 5.83 \angle 59.04^\circ$

ดังนั้น $Z_1 \times Z_2$ จะได้

$$Z_1 \times Z_2 = (3.61) \cdot (5.83) \angle (56.31^\circ + 59.04^\circ)$$

ตอบ $Z_1 \times Z_2 = 21.032 \angle 115.35^\circ$

ตัวอย่างที่ 1.9 จงหาผลลัพธ์ของการคูณ

(a) $Z_1 \times Z_2$ เมื่อกำหนดให้ $Z_1 = 8 \angle 25^\circ, Z_2 = 4 \angle 60^\circ$

(b) $Z_1 \times Z_2 \times Z_3$ เมื่อกำหนดให้ $Z_1 = 3 \angle 16^\circ, Z_2 = 5 \angle -44^\circ, Z_3 = 2 \angle 80^\circ$

วิธีทำ

(a) $Z_1 \times Z_2 = (8 \times 4) \angle (25^\circ + 60^\circ) = 32 \angle 85^\circ$

ตอบ $Z_1 \times Z_2 = 32 \angle 85^\circ$

(b) $Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = (3 \times 5 \times 2) \angle (16^\circ + (-44^\circ) + 80^\circ) = 30 \angle 52^\circ$

ตอบ $Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = 30 \angle 52^\circ$

1.4.2 การหารจำนวนเชิงซ้อน

1) การหารจำนวนเชิงซ้อนสำหรับระบบพิกัดฉาก (Division of complex number for the rectangular form) การหารจำนวนเชิงซ้อนสามารถทำได้โดยการคูณค่าคอนจูเกตทั้งคู่

(Numerator) และส่วน (Denominator) การคอนจูเกต (Conjugate) สามารถทำได้โดยการเปลี่ยนเครื่องหมายหน้าจำนวนจินตภาพให้เป็นลบซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้ เช่น $Z = a + jb$ เมื่อทำการคอนจูเกตแล้วจะได้ $Z^* = a - jb$ ดังนั้นการหารจำนวนเชิงซ้อน สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (1.15)

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a + jb}{c + jd}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a + jb}{c + jd} \times \frac{c - jd}{c - jd} \quad (1.15)$$

ตัวอย่างที่ 1.10 จงหาค่าของผลหาร Z_1/Z_2 เมื่อ $Z_1 = 2 - j5$ และ $Z_2 = 3 + j4$

วิธีทำ จากสมการที่ (1.15)

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a + jb}{c + jd} \times \frac{c - jd}{c - jd}$$

เมื่อแทนค่า Z_1 กับ Z_2 ในสมการที่ (1.15) จะได้

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2 - j5}{3 + j4} \times \frac{3 - j4}{3 - j4}$$

$$= \frac{6 - j8 - j15 + j^2 20}{3^2 + 4^2}$$

$$= \frac{-14 - j23}{25}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{-14}{25} - j \frac{23}{25}$$

หรือ

ตอบ $\frac{Z_1}{Z_2} = -0.56 - j0.92$

ตัวอย่างที่ 1.11 จงหาค่าของ $\frac{Z_1 \times Z_2}{Z_1 + Z_2}$ เมื่อ $Z_1 = 1 - j3$ และ $Z_2 = 2 + j5$

วิธีทำ

$$\frac{Z_1 \times Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(1 - j3)(-2 + j5)}{(1 - j3) + (-2 + j5)}$$

$$= \frac{13 - j11}{-1 + j2}$$

$$= \frac{13 - j11}{-1 + j2} \times \frac{-1 - j2}{-1 - j2}$$

$$= \frac{13 - j26 - j11 - j^2 22}{1^2 + 2^2}$$

$$= \frac{9 - j37}{5}$$

$$= \frac{9 - j37}{5}$$

$$= \frac{9}{5} - j\frac{37}{5}$$

ตอบ

$$\frac{Z_1 \times Z_2}{Z_1 + Z_2} = 1.8 - j7.4$$

2) การหารจำนวนเชิงซ้อนสำหรับระบบเชิงขั้ว (Division of complex number for Polar form) การหารจำนวนเชิงซ้อน สามารถหาได้ดังสมการ (1.16)

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1| \angle \theta_1}{|Z_2| \angle \theta_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \angle (\theta_1 - \theta_2) \quad (1.16)$$

ตัวอย่างที่ 1.12 จงหาค่าของ $\frac{Z_1}{Z_2}$ เมื่อ $Z_1 = 28.3\angle 45^\circ$ และ $Z_2 = 30\angle -125^\circ$

วิธีทำ

เมื่อแทนค่า

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{28.3\angle 45^\circ}{30\angle -125^\circ} = 0.943\angle (45^\circ - (-125^\circ))$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = 0.943\angle 170^\circ$$

ตัวอย่างที่ 1.13 กำหนดให้ $Z_1 = 20 + j20$, $Z_2 = 30\angle 120^\circ$ และ $Z_3 = 10 + j0$

a) จงหาค่า $\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3}$

b) จงหาค่า $\frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_1}$

c) จงเขียนเฟสเซอร์ไดอะแกรมของ $\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3}$ และ $\frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_1}$

วิธีทำ

a) จงหาค่า $\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3}$

เปลี่ยน Z_1 กับ Z_3 ให้อยู่ในรูปของ Polar form

$$Z_1 = 20 + j20 = 28.3\angle 45^\circ$$

และ

$$Z_3 = 10 + j0 = 10\angle 0^\circ$$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3} = \frac{(28.3 \angle 45^\circ)(30 \angle 120^\circ)}{10 \angle 0^\circ} = 84.9 \angle -75^\circ$$

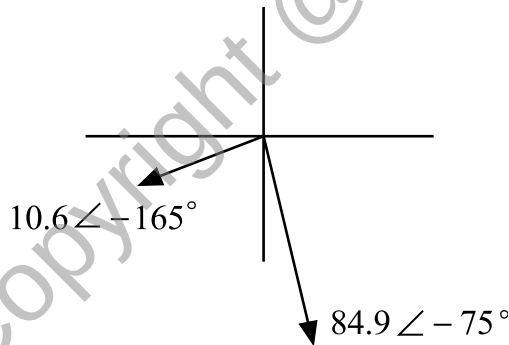
ตอบ $\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3} = 84.9 \angle -75^\circ$

b) เมื่อหาค่า $\frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_1}$

$$\frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_1} = \frac{(30 \angle -120^\circ)(10 \angle 0^\circ)}{(28.3 \angle 45^\circ)} = 10.6 \angle (-165^\circ)$$

ตอบ $\frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_1} = 10.6 \angle (-165^\circ)$

c) จงเขียนเฟสเซอร์ไดอะแกรมของ $\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3}$ และ $\frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_1}$



รูปที่ 1.5 เฟสเซอร์ไดอะแกรม

ตัวอย่างที่ 1.14 จงหาผลคูณจำนวนเชิงซ้อนของ Z_1 / Z_2 เมื่อ

$$Z_1 = 16 \angle 75^\circ, Z_2 = 16 \angle 15^\circ$$

วิธีทำ

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{16}{16} \angle (75^\circ - 15^\circ)$$

ตอบ $\frac{Z_1}{Z_2} = 1 \angle 60^\circ$

ตัวอย่างที่ 1.15 จงหาผลคูณจำนวนเชิงซ้อนของ $(Z_1 + Z_2) / (Z_3 \cdot Z_4)$

เมื่อ $Z_1 = 10 \angle -30^\circ$, $Z_2 = 3 + j4$, $Z_3 = 2 + j4$ และ $Z_4 = 3 - j5$

วิธีทำ

$$\frac{(Z_1 + Z_2)}{(Z_3 \cdot Z_4^*)} = \frac{10 \angle -30^\circ + (3 - j4)}{(2 + j4)(3 - j5)^*}$$

$$\frac{10 \angle -30^\circ + (3 - j4)}{(2 + j4)(3 - j5)^*} = \frac{8.66 - j5 + (3 - j4)}{(2 + j4)(3 + j5)^*}$$

$$= \frac{11.66 - j9}{-14 + j22}$$

$$= \frac{14.73 \angle -37.66^\circ}{26.08 \angle 122.47^\circ}$$

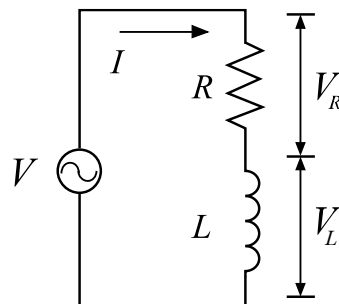
$$\text{ตอบ } (Z_1 + Z_2) / (Z_3 \cdot Z_4) = 0.565 \angle -160.31^\circ$$

1.5 การประยุกต์จำนวนเชิงซ้อนในวงจรไฟฟ้า

ทฤษฎีจำนวนเชิงซ้อนสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าได้ โดยองค์ประกอบของตัวแปรไฟฟ้าที่ประกอบด้วย ความต้านทาน (R) ความเหนี่ยวนำ (L) และ ความเก็บประจุ (C)

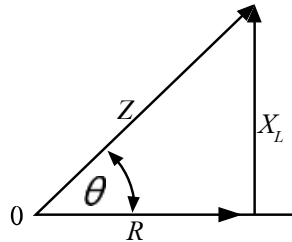
1.5.1 วงจรไฟฟ้าอนุกรม RL

วงจรไฟฟ้าอนุกรม RL แสดงดังรูปที่ 1.6 ที่ประกอบด้วยตัวต้านทาน (R) ต่ออนุกรมกับตัวเหนี่ยวนำ (L) และแหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสสลับ (V)



รูปที่ 1.6 วงจรไฟฟ้าอนุกรม RL

จากวงจรไฟฟ้าอนุกรม RL สามารถเขียนเฟสเซอร์ไดอะแกรมเพื่อหาค่าอิมพีแดนซ์ Z รวมได้ดังรูปที่ 1.7 โดยค่ารีแอคแตนซ์ของตัวเหนี่ยวนำจะนำหน้าตัวต้านทานเป็นมุม 90° โดยค่าอิมพีแดนซ์รวมสามารถแสดงได้ในแบบ Rectangular form และ Polar form ดังสมการที่ (1.17)



รูปที่ 1.7 เฟสเซอร์ไดอะแกรมของวงจรอนุกรม R

$$Z = Z_R + Z_L \quad (1.17)$$

เมื่อค่าอิมพีแดนซ์ของตัวต้านทาน Z_R และอิมพีแดนซ์ของตัวเหนี่ยวนำ Z_L แสดงในสมการที่ (1.18) และ (1.19) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบ Rectangular form และ Polar form

$$Z_R = R \angle 0^\circ = R + j0 \quad (1.18)$$

$$Z_L = X_L \angle 90^\circ = jX_L \quad (1.19)$$

เมื่อค่า $X_L = 2\pi fL$

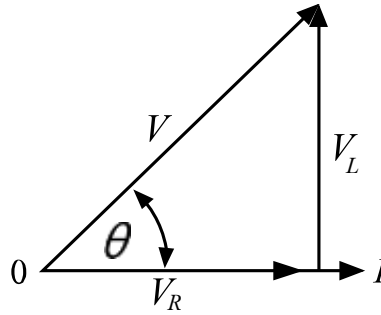
การเขียนสมการ Z ให้อยู่ในรูปของ Polar form แสดงดังสมการที่ (1.20)

$$Z = |Z| \angle \theta \quad (1.20)$$

เมื่อขนาด และมุมแสดงดังสมการที่ (1.21)

$$\left. \begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + X_L^2} \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{X_L}{R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

ความสัมพันธ์ของแรงดันที่แหล่งจ่าย และแรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน R ต่ออนุกรมกับตัวเหนี่ยวนำ L สามารถแสดงในรูปของเฟสเซอร์ไดอะแกรมดังรูปที่ 1.8



รูปที่ 1.8 เฟสเซอร์ไดอะแกรมของแรงดัน

การหาค่ากระแสที่ไหลในวงจรสามารถหาได้ดังสมการ (1.22)

$$I = \frac{V}{Z} \quad (1.22)$$

แรงดันตกคร่อมตัวต้านทานหาได้ดังสมการที่ (1.23)

$$V_R = IZ_R \quad (1.23)$$

แรงดันตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำหาได้ดังสมการที่ (1.24)

$$V_L = IZ_L \quad (1.24)$$

ตัวอย่างที่ 1.16 จากวงจรในรูปที่ 1.6 เมื่อกำหนดให้ตัวต้านทาน $R = 3.5 \, \Omega$ ต่ออนุกรมกับตัวเหนี่ยวนำ $L = 0.1H$ แรงดันที่แหล่งจ่าย $V = 220 \angle 0^\circ$ และใช้ไฟฟ้ากระแสสลับในระบบความถี่ $f = 50 \, \text{Hz}$ จงหาค่าต่อไปนี้

- ค่าอิมพีแดนซ์รวม Z
- กระแสที่ไหลผ่านวงจร I
- แรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน V_R
- แรงดันตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำ V_L
- เขียนเฟสเซอร์ไดอะแกรมของ V_R , V_L และ V

วิธีทำ

- เมื่อหาค่า Z
เมื่อค่ารีแอกแตนซ์

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(50)(0.1) = 31.4 \, \Omega$$

ดังนั้นหาค่าขนาดของรีแอคแตนซ์

$$X_L = \sqrt{3.5^2 + (31.4)^2} = 31.6 \Omega$$

และคำนวณค่ามุม

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{X_L}{R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{31.4}{3.5} \right) = 83.64^\circ$$

ตอบ $Z = 3.5 + j31.4$

b) เมื่อหากระแสที่ไหลผ่านวงจร/

$$I = \frac{V}{Z}$$

$$I = \frac{220 \angle 0^\circ}{31.6 \angle 83.64^\circ}$$

ตอบ $I = 6.96 \angle -83.64^\circ \text{ A}$

c) หาค่าแรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน V_R

$$V_R = IZ_R$$

$$= (6.96 \angle -83.64^\circ) 3.5$$

$$= (6.96 \angle -83.64^\circ) 3.5$$

ตอบ $V_R = 24.36 \angle -83.64^\circ \text{ V}$

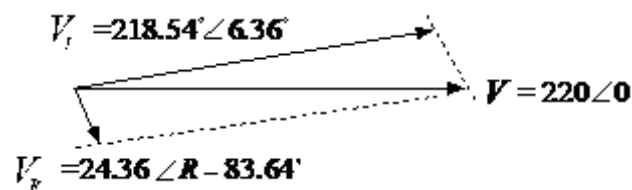
d) หาค่าแรงดันตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำ V_L

$$V_L = IZ_L$$

$$= (6.96 \angle -83.64^\circ) (31.4 \angle 90^\circ)$$

ตอบ $V_L = 218.54 \angle 6.36^\circ \text{ V}$

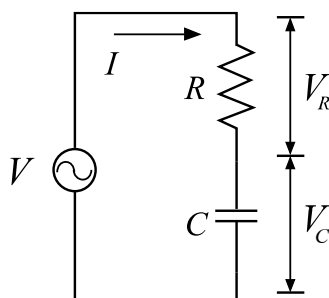
e) เขียนเฟสเซอร์ไดอะแกรมของ V_R , V_L และ V



รูปที่ 1.9 เฟสเซอร์ไดอะแกรมของแรงดัน V_R , V_L และ V

1.5.2 วงจรไฟฟ้าอนุกรม RC

การประยุกต์ใช้จำนวนเชิงซ้อนหาค่าทางไฟฟ้าของวงจรอนุกรม RC แสดงดังรูปที่ 1.10



รูปที่ 1.10 วงจรอนุกรม RC

จากรูปที่ 1.10 สามารถหาค่าอิมพีแดนซ์ Z ดังสมการที่ (1.25)

$$Z = Z_R + Z_C \quad (1.25)$$

เมื่อ Z_C หาได้จากสมการที่ (1.26)

$$Z_C = jX_C \quad \text{และ} \quad X_C = \frac{1}{2\pi fC} \quad (1.26)$$

ดังนั้นสามารถเขียนค่า Z ให้อยู่ในรูปของ Rectangular form จะได้ดังสมการที่ (1.27)

$$Z = R + jX_C \quad (1.27)$$

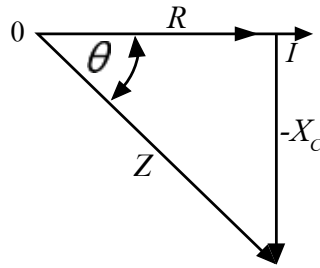
และเขียนค่า Z ให้อยู่ในรูปของ Polar form จะได้ดังสมการที่ (1.28)

$$Z = |Z| \angle \theta \quad (1.28)$$

เมื่อขนาดและมุมสามารถหาได้จากสมการที่ (1.29)

$$\left. \begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + (-X_C)^2} \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{-X_C}{R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

และสามารถเขียนเฟสเซอร์ไดอะแกรมของอิมพีแดนซ์ได้ดังรูปที่ 1.11



รูปที่ 1.11 ความสัมพันธ์ค่าอิมพีแดนซ์ของวงจรอนุกรม RC

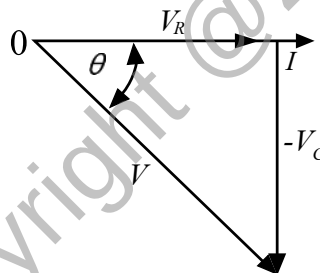
การหาค่าแรงดันในวงจรสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังเฟสเซอร์ไดอะแกรมในรูปที่ 1.11

แรงดันตกคร่อมตัวต้านทานหาได้จากสมการที่ (1.30)

$$V_R = IZ_R \quad (1.30)$$

แรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุหาได้จากสมการที่ (1.31)

$$V_C = IZ_C = I(-X_C) \quad (1.31)$$



รูปที่ 1.12 แสดงเฟสเซอร์ไดอะแกรมแรงดัน

ตัวอย่างที่ 1.17 จากวงจรในรูปที่ 1.10 เมื่อ ตัวต้านทาน $R = 10\Omega$ ต่ออนุกรมกับตัวเหนี่ยวนำ $C = 0.01F$ เมื่อแรงดันที่แหล่งจ่าย $V = 100 \angle 0^\circ$ เมื่อใช้ไฟฟ้ากระแสสลับในระบบความถี่ $f = 50 \text{ Hz}$ จงหาค่าต่อไปนี้

- ค่าอิมพีแดนซ์รวม Z
- กระแสที่ไหลผ่านวงจร I
- แรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน V_R
- แรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ V_C
- เขียนเฟสเซอร์ไดอะแกรมของ

วิธีทำ a) หาค่าอิมพีแดนซ์รวม Z

$$Z = Z_R + Z_C$$

เมื่อ $Z_R = 10$ ดังนั้นสามารถหาค่า

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(50)(0.01)} = 0.32 \Omega$$

$$Z_C = jX_C = j0.32$$

ดังนั้นจะได้ค่าอิมพีแดนซ์รวม

$$Z = 10 - j0.32$$

หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ Polar form จะได้

$$\left. \begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + (-X_C^2)} \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{-X_C}{R} \right) \end{aligned} \right\}$$
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (-X_C^2)} = \sqrt{10^2 + (-0.32^2)} = 10$$
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-X_C}{R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-0.32}{10} \right) = -17.7^\circ$$

ตอบ $Z = 10 \angle -17.7^\circ$

b) หาค่ากระแสที่ไหลผ่านวงจร I

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100 \angle 0^\circ}{10 \angle -17.7^\circ} = 10 \angle -17.7^\circ \text{ A}$$

ตอบ $I = 10 \angle -17.7^\circ \text{ A}$

c) หาค่าแรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน V_R

$$V_R = IZ_R = (10 \angle -17.7^\circ)(100 \angle 0^\circ) = 1000 \angle -17.7^\circ \text{ V}$$

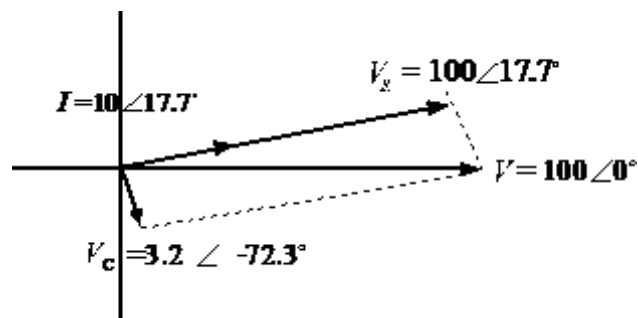
ตอบ $V_R = 1000 \angle -17.7^\circ \text{ V}$

d) หาค่าแรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน V_C

$$V_C = IZ_C = (10 \angle -17.7^\circ)(0.32 \angle 90^\circ) = 3.2 \angle 72.3^\circ \text{ V}$$

ตอบ $V_C = 3.2 \angle 72.3^\circ \text{ V}$

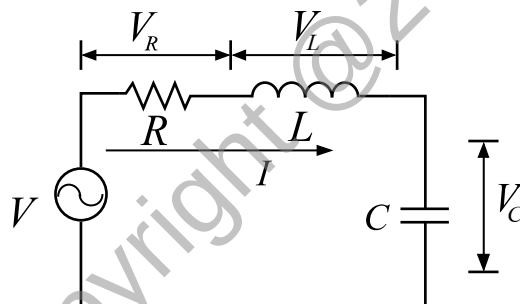
เขียนเฟสเซอร์ไดอะแกรมของ I , V_R , V_L และ V



รูปที่ 1.13 แสดงเฟสเซอร์ไดอะแกรมแรงดัน

1.5.3 วงจรไฟฟ้าแบบอนุกรม RLC

วงจรอนุกรม RLC แสดงดังเป็นรูปที่ 1.14 ประกอบด้วยตัวต้านทาน (R) ตัวเหนี่ยวนำ (L) และตัวเก็บประจุ (C) ที่ต่อในลักษณะอนุกรม และแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้ากระแสสลับ (V)



รูปที่ 1.14 วงจรอนุกรม RLC

จากรูปที่ 1.14 สามารถหาค่าอิมพีแดนซ์ในรูปของ Rectangular form ดังสมการที่ (1.32) และสามารถอิมพีแดนซ์ในรูปของ Polar form ดังสมการที่ (1.33)

Rectangular form

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C$$

$$Z = R + jX_L - jX_C \quad (1.32)$$

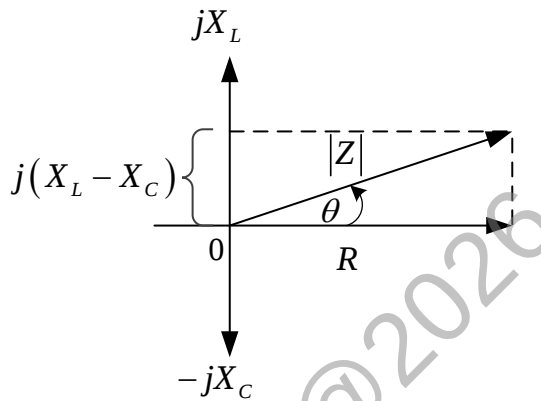
Polar form

$$Z = |Z| \angle \theta \quad (1.33)$$

ขนาดและมุมค่าอิมพีแดนซ์ของวงจรอนุกรม RLC สามารถหาดังสมการที่ (1.34)

$$\left. \begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + X_L^2 + (-X_C)^2} \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

จากสมการอิมพีแดนซ์ที่อยู่ในรูปของ Rectangular form และ Polar form แสดงดังรูปที่ 1.15



รูปที่ 1.15 เฟสเซอร์ไดอะแกรมของวงจรอนุกรม RLC

ตัวอย่างที่ 1.18 จากวงจรในรูปที่ 1.14 เมื่อกำหนดให้ตัวต้านทาน $R = 10 \, \Omega$ ตัวเหนี่ยวนำ $L = 0.1$

H และ ตัวเก็บประจุ $C = 150 \, \mu F$ เมื่อแรงดันที่แหล่งจ่าย $V = 200 \angle 0^\circ$ ใช้กับความถี่ $f = 50 \, Hz$

- จงหาค่าอิมพีแดนซ์รวมของวงจร Z
- จงหาค่ากระแส I
- หาค่าแรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน V_R
- หาค่าแรงดันตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำ V_L
- หาค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ V_C

วิธีทำ

- หาค่า Z

$$Z_R = 10$$

$$Z_L = jX_L = j(2\pi fL) = j(2\pi 50 \times 0.1) = j31.4$$

$$Z_C = -jX_C = -j \frac{1}{2\pi fC} = -j \frac{1}{2\pi 50 \times (150 \times 10^{-6})} = -j21.2$$

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C$$

หรือ

$$|Z| = \sqrt{10^2 + (10.2)^2} = 14.28$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{31.4 - 21.2}{10} \right) = -45.56$$

ตอบ $Z = 14.28 \angle -45.56^\circ$

b) หาค่า /

$$I = \frac{V}{Z}$$

$$I = \frac{220 \angle 0^\circ}{14.28 \angle -45.56^\circ} = 15.4 \angle 45.56^\circ \text{ A}$$

ตอบ $I = 15.4 \angle 45.56^\circ \text{ A}$

c) หาค่าแรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน V_R

$$V_R = IZ_R$$

$$V_R = (15.4 \angle 45.56^\circ)(10 \angle 0^\circ) = 154 \angle 45.56^\circ \text{ V}$$

ตอบ $V_R = 154 \angle 45.56^\circ \text{ V}$

d) หาค่าแรงดันตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำ V_L

$$V_L = IZ_L$$

$$V_L = (15.4 \angle 45.56^\circ)(31.4 \angle 90^\circ) = 483.56 \angle 135.56^\circ \text{ V}$$

ตอบ $V_L = 483.56 \angle 135.56^\circ \text{ V}$

e) หาค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ V_C

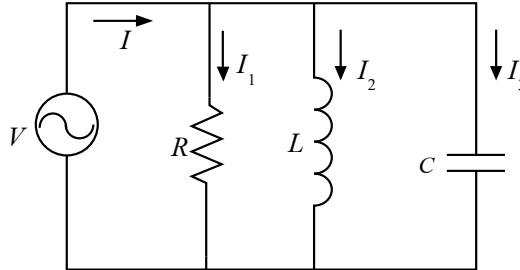
$$V_C = IZ_C$$

$$V_C = (15.4 \angle 45.56^\circ)(21.2 \angle -90^\circ) = 326.46 \angle -44.44^\circ \text{ V}$$

ตอบ $V_C = 326.46 \angle -44.44^\circ \text{ V}$

1.5.4 วงจรไฟฟ้าแบบขนาน RLC

วงจรขนาน RLC แสดงดังรูปที่ 1.16 ประกอบด้วยตัวต้านทาน (R) ตัวเหนี่ยวนำ (L) และตัวเก็บประจุ (C) ต่อกันในลักษณะแบบขนาน



รูปที่ 1.16 วงจรไฟฟ้าขนาน RLC

การหาค่าอิมพีแดนซ์ Z สามารถหาจากส่วนกลับของค่าแอดมิตแตนซ์ดังสมการที่ (1.35)

$$Z = \frac{1}{Y} \quad (1.35)$$

ผลรวมของแอดมิตแตนซ์หาได้จากสมการที่ (1.36) หรือสมการที่ (1.37) หรือสมการที่ (1.38)

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 \quad (1.36)$$

$$Y = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} \quad (1.37)$$

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{(-jX_C)} \quad (1.38)$$

กระแสรวมของวงจรหาได้จากสมการที่ (1.39)

$$I = \frac{V}{Z} \quad (1.39)$$

กระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทานหาได้จากสมการที่ (1.40)

$$I_1 = \frac{V}{Z_R} \quad (1.40)$$

กระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำหาได้จากสมการที่ (1.41)

$$I_2 = \frac{V}{Z_L} \quad (1.41)$$

กระแสที่ไหลผ่านตัวเก็บประจุหาได้จากสมการที่ (1.42)

$$I_3 = \frac{V}{Z_c} \quad (1.42)$$

ตัวอย่างที่ 1.19 จากวงจรในรูปที่ 1.16

เมื่อกำหนดให้ตัวต้านทาน $R = 10 \Omega$ ตัวเหนี่ยวนำ $L = 0.5H$ และตัวเก็บประจุ $C = 10 \mu F$ เมื่อแรงดันที่แหล่งจ่าย $V = 200 \angle 0^\circ$ ใช้กับความถี่ $f = 50 \text{ Hz}$

- จงหาค่าอิมพีแดนซ์รวมของวงจร Z
- จงหาค่ากระแส/
- หาค่ากระแสไหลผ่านตัวต้านทาน I_1
- หาค่ากระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ I_2
- หาค่ากระแสไหลผ่านตัวเก็บประจุ I_3

วิธีทำ

- หาค่า Z

$$Y_1 = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{jX_L} = \frac{1}{j(2\pi 50 \times 0.05)} = -j0.0637$$

$$Y_3 = \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{-jX_C} = \frac{1}{-j(2\pi 50 \times 10 \times 10^{-6})} = -j0.00314$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

$$= 0.1 - j0.0637 + j0.00314$$

$$Y = 0.1 - j0.0605 = 0.1168 \angle -31.17^\circ$$

ดังนั้นจะได้ค่าอิมพีแดนซ์

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{0.1168 \angle -31.17^\circ} = 8.56 \angle 31.17^\circ$$

ตอบ $Z = 8.56 \angle 31.17^\circ$

b) จงหาค่ากระแส/

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{Z} \\ &= \frac{200 \angle 0^\circ}{8.56 \angle 31.17^\circ} \end{aligned}$$

ตอบ $I = 23.36 \angle -31.17^\circ$

c) หาค่ากระแสไหลผ่านตัวต้านทาน/ I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V}{Z_R} \\ &= \frac{200 \angle 0^\circ}{10 \angle 0^\circ} \end{aligned}$$

ตอบ $I_1 = 20 \angle 0^\circ \text{ A}$

d) หาค่ากระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ/ I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{V}{Z_L} \\ &= \frac{200 \angle 0^\circ}{15.7 \angle 90^\circ} \end{aligned}$$

ตอบ $I_2 = 12.73 \angle -90^\circ \text{ A}$

e) หาค่ากระแสไหลผ่านตัวเก็บประจุ/ I_3

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{V}{Z_C} \\ &= \frac{200 \angle 0^\circ}{318.4 \angle -90^\circ} \end{aligned}$$

ตอบ $I_3 = 0.63 \angle 90^\circ \text{ A}$

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1.1 จงเปลี่ยนระบบพิกัดฉาก (Rectangular form) ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar form)

$$Z = 12 - j12$$

1.2 จงเปลี่ยนระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar form) ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก (Rectangular form)

$$Z = 6.88 \angle 12^\circ$$

1.3 จงบวกจำนวนเชิงซ้อน $Z_T = Z_1 + Z_2$ เมื่อ $Z_1 = (3 + j2)$, $Z_2 = (5 - j)$

1.4 จงลบจำนวนเชิงซ้อน $Z_T = Z_1 - Z_2$ เมื่อ $Z_1 = (-2 + j6)$, $Z_2 = (3 - j2)$

1.5 จงหาผลคูณของ $Z_T = Z_1 Z_2 Z_3$ เมื่อ $Z_1 = 1 + j2$, $Z_2 = 4 - j3$ และ $Z_3 = -2 + j3$

1.6 จงหาผลหารของ $Z_T = \frac{Z_1 + Z_3}{Z_2 - Z_4}$ เมื่อ $Z_1 = 1 + j2$, $Z_2 = 4 - j3$, $Z_3 = -2 + j3$ และ

$$Z_4 = -5 - j$$

1.7 จงหาค่าขนาดของกระแสและมุม เมื่อกำหนดให้ $Z_1 = (3 + j6)\Omega$ และ $Z_2 = (4 - j3)\Omega$
และแรงดันกระแสสลับเท่ากับ 120 V

เอกสารอ้างอิง

1. Alexander, C. K., & Sadiku, M. N. O. (2020). *Fundamentals of electric circuits* (6th ed.). McGraw-Hill Education.
2. Boylestad, R. L. (2023). *Introductory circuit analysis* (14th ed.). Pearson.
3. Dorf, R. C., & Svoboda, J. A. (2022). *Introduction to electric circuits* (10th ed.). Wiley.
4. Hayt, W. H., Kemmerly, J. E., & Durbin, S. M. (2019). *Engineering circuit analysis* (9th ed.). McGraw-Hill Education.
5. Chapman, S. J. (2017). *Electric machinery fundamentals* (5th ed.). McGraw-Hill Education.
6. Leon-Garcia, A. (2018). *Probability, statistics, and random processes for electrical engineering* (4th ed.). Pearson.
7. Karris, S. T. (2019). *Mathematical models of electrical network systems and their applications* (2nd ed.). Orchard Publications.
8. Van Valkenburg, M. E. (2014). *Network analysis* (3rd ed.). Pearson.
9. Nilsson, J. W., & Riedel, S. (2021). *Electric circuits* (11th ed.). Pearson.
10. Fawwaz, T. U., & Cain, G. (2018). *Electromagnetic fields* (2nd ed.). McGraw-Hill.
11. Heaviside, O. (2011). *Electromagnetic theory* (Reprint ed.). Dover Publications.
12. Leonhard, W. (2001). *Control of electrical drives* (3rd ed.). Springer.
13. Desoer, C. A., & Kuh, E. S. (2009). *Basic circuit theory* (Reprint ed.). Dover Publications.
14. Kreyszig, E. (2020). *Advanced engineering mathematics* (10th ed.). Wiley.
15. Zill, D. G., & Wright, W. S. (2018). *Advanced engineering mathematics* (6th ed.). Jones & Bartlett Learning.

บทที่ 2

การวิเคราะห์เวกเตอร์

2.1 บทนำ

การวิเคราะห์เวกเตอร์ถือเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์พื้นฐานที่มีความสำคัญยิ่งต่อการศึกษาวิชาฟิสิกส์ และวิศวกรรมศาสตร์ เนื่องจากปรากฏการณ์ และปริมาณทางกายภาพส่วนใหญ่จำเป็นต้องอาศัยทั้งขนาด และทิศทางในการระบุสถานะที่เกิดขึ้น เนื้อหาในบทนี้จึงมุ่งเน้นให้ผู้เรียนได้เข้าใจถึงความแตกต่างที่ชัดเจนระหว่างปริมาณสเกลาร์ (Scalar) ซึ่งบ่งบอกเพียงขนาด เช่น มวล อุณหภูมิ และเวลา กับปริมาณเวกเตอร์ (Vector) ซึ่งประกอบด้วยขนาดและทิศทาง เช่น แรง ความเร็ว และความเร่ง

การศึกษาเวกเตอร์ในบทนี้จะครอบคลุมตั้งแต่การแทนเวกเตอร์ด้วยรูปภาพหรือส่วนของเส้นตรงที่มีลูกศรชี้บอกทิศทาง ตลอดจนระเบียบวิธีการคำนวณทางพีชคณิตของเวกเตอร์ ทั้งการบวก การลบ และการคูณเวกเตอร์ นอกจากนี้ เพื่อให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาเชิงพื้นที่ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้อย่างเป็นระบบ จะมีการนำเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector) ในแนวแกนหลัก ได้แก่ i, j, k มาใช้เป็นตัวแทนของทิศทางตามแกน X, Y และ Z เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ และแรงที่เกิดขึ้นในระบบได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยมีรายละเอียดและหัวข้อการศึกษาดังต่อไปนี้

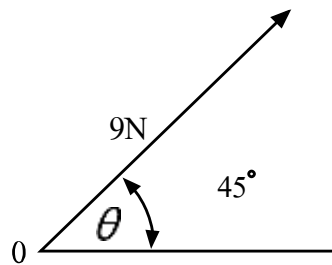
2.2 ความหมายของสเกลาร์ และเวกเตอร์

ยกตัวอย่างเช่นปริมาณน้ำเต็มในถังอาจจะวัดได้ด้วยระยะเวลาของน้ำที่เต็ม เช่นน้ำเต็มถึงที่เวลา 50 s ในทำนองเดียวกัน อุณหภูมิของห้อง อาจจะวัดได้ที่ 16°C และการวัดของมวลอาจจะวัดได้ที่ 3 kg โดยการวัดที่กล่าวมาดังกล่าวเรียกได้เป็นการวัดปริมาณหรือสเกลาร์นอกเหนือจากนั้น การวัดทิศทางการเคลื่อนที่ของรถ วัดได้ 90 km/h หรือการวัดแรงได้ 20 N หรือการวัดอัตราเร่งได้ $10/\text{s}^2$ จากการวัด ปริมาณดังกล่าวเราสามารถเขียนแทนได้ด้วยปริมาณเวกเตอร์

2.3 การเขียนเวกเตอร์

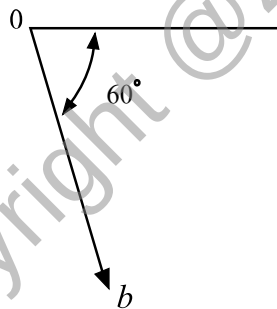
ปริมาณเวกเตอร์สามารถแสดงได้โดยการวาดโดยแสดงองค์ประกอบของ ความยาว และทิศทางโดย การใช้ลูกศรแสดงทิศทางของเวกเตอร์ และหัวของลูกศรเราเรียกว่าปลายของเวกเตอร์

จากรูปที่ 2.1 เป็นการแสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่มีขนาด 9 N และทำมุมจากแกนนอน 45° ในการเคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกา



รูปที่ 2.1 เวกเตอร์แรงขนาด 9 N ทำมุม 45°

และจากรูปที่ 2.2 แสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของอัตราเร็ว 20 m/s โดยมีมุม -60° เมื่อพิจารณาในทิศทาง ตามเข็มนาฬิกาจากแกนนอน



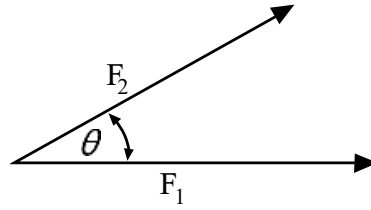
รูปที่ 2.2 เวกเตอร์ b ทิศทางทำมุม -60°

การแสดงทิศทางของเวกเตอร์ในการพิจารณาเวกเตอร์สามารถพิจารณาได้ดังนี้

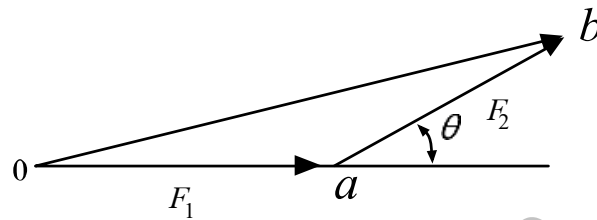
การใช้เส้นสีเข้มแทนเส้นของเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ เมื่อมีลูกศรที่อยู่ด้านบนหมายความว่าทิศทางการเคลื่อนที่ของเวกเตอร์จาก A ไป B ยกตัวอย่างเช่น จากรูปที่ 2.1 สามารถเขียนแรง 9 N ที่มุม 45° สามารถเขียนแทนได้ด้วย $\overrightarrow{0a}$ หรือ $0a$ หรือ $\overline{0a}$

2.4 การรวมเวกเตอร์โดยการวาดรูป

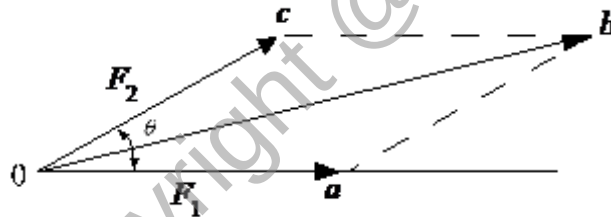
การรวมเวกเตอร์ของสองเวกเตอร์หรือมากกว่าโดยการวาดสามารถแสดงได้ดังนี้วิธีการวาดแบบหัวถึงหางเช่นจากรูปที่ 2.3 ถึงรูปที่ 2.5 มีแรงสองแรงคือ F_1 และ F_2



รูปที่ 2.3 การกระทำร่วมกันของเวกเตอร์แรง F_1 และ F_2

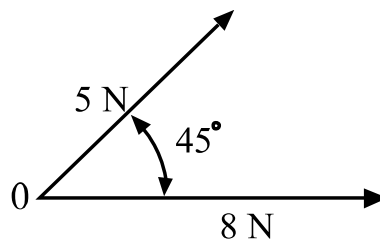


รูปที่ 2.4 การต่อเวกเตอร์แรง F_2 ที่ปลายของเวกเตอร์แรง F_1



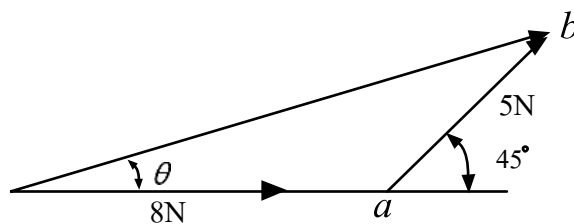
รูปที่ 2.5 แผนภาพการหาแรงลัพธ์ด้วยรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ตัวอย่างที่ 2.1 เมื่อมีแรงที่หนึ่งขนาด 5 นิวตัน ทำมุม 45° กับแรงที่สองขนาด 8 นิวตัน แสดงดัง รูปที่ 2.6 จงมาขนาดของเวกเตอร์และผลรวมของแรงทั้งสอง และผลรวมของทิศทาง ที่กระทำกับแรง 8 นิวตัน

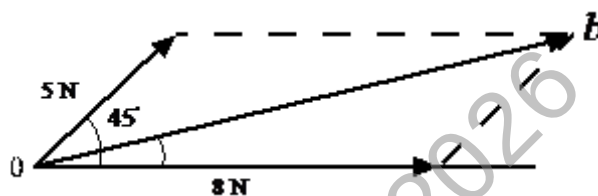


รูปที่ 2.6 แรงสองแรงขนาด 8 N และ 5 N ทำมุม 45° ต่อกัน (สำหรับตัวอย่างที่ 2.1)

วิธีทำ ที่แรง 8 N สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.7 และรูปที่ 2.8

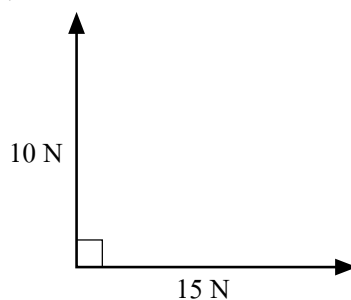


รูปที่ 2.7 การรวมเวกเตอร์แรงโดยวิธีสร้างรูปสามเหลี่ยมเพื่อหามุม และแรงลัพธ์



รูปที่ 2.8 การรวมเวกเตอร์แรงขนาด 8 N และ 5 N ทำมุม 45° ด้วยวิธีสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ตัวอย่างที่ 2.2 มีแรง 15 นิวตัน และ 10 นิวตันทำมุมตั้งฉากกัน 90° องศา ดังแสดงในรูปที่ 2.9 จงหาขนาดและเขียนผลรวมของแรงลัพธ์ และแสดงทิศทางที่มีผลต่อแรงเวกเตอร์ 15 นิวตัน



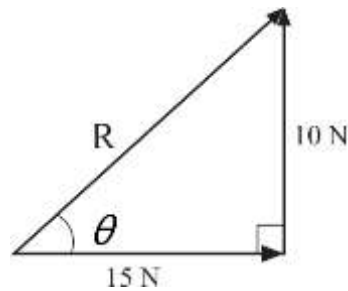
รูปที่ 2.9 แรงสองแรงขนาด 15 N และ 10 N กระทำตั้งฉากซึ่งกันและกัน

วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1 เขียนแรง 15 N ในแกนนอนดังแสดงในรูปที่ 2.10

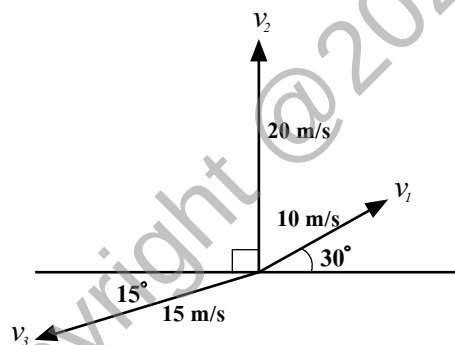
ขั้นตอนที่ 2 เขียนเวกเตอร์ 10 N ที่ทำมุมตั้งฉากกับแกนนอน

ขั้นตอนที่ 3 หาผลรวมของแรงลัพธ์ ที่มีมุมเท่ากับ 34°



รูปที่ 2.10 การรวมแรงตั้งฉาก และแรงแนวราบเพื่อหาแรงลัพธ์ R

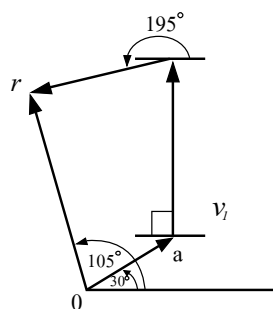
ตัวอย่างที่ 2.3 มีทิศทางของความเร็ว 10 m/s, 20 m/s และ 15 m/s ที่แสดงดังรูปที่ 2.11 จงเขียนขนาดของ เวกเตอร์และหาผลรวมของแรงลัพธ์



รูปที่ 2.11 แผนภาพการบวกเวกเตอร์ความเร็ว v_1 , v_2 และ v_3

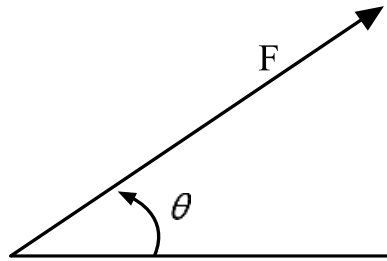
วิธีทำ สามารถแสดงขั้นตอนการหาได้ดังนี้

ขั้นตอนที่หนึ่ง เขียนความยาว 10 หน่วย ดังรูปที่ 2.12



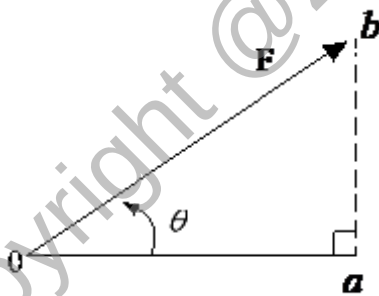
รูปที่ 2.12 การหาเวกเตอร์ลัพธ์จากเวกเตอร์ a และ v_2

แรงของเวกเตอร์ F แสดงได้ดังรูปที่ 2.13 ที่ทำมุม θ กับแกนนอน



รูปที่ 2.13 แรง F ทำมุม θ กับแนวระดับ

โดยทั่วไปองค์ประกอบของเวกเตอร์จะมีสององค์ประกอบได้แก่เวกเตอร์ในแนวแกนนอน และเวกเตอร์ แนวแกนตั้ง ดังรูปที่ 2.14 เรียกเวกเตอร์ในแนวแกนนอนคือเวกเตอร์ $0a$ และแรงของเวกเตอร์ F คือเวกเตอร์ ab



รูปที่ 2.14 การแยกแรง F เป็นองค์ประกอบตามแกน a และ b

จากคุณสมบัติของตรีโกณมิติแสดงดังสมการที่ (2.1) เมื่อ

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{0a}{0b} \\ 0a &= 0b \cos \theta \\ &= F \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ดังนั้นสามารถเขียนองค์ประกอบของเวกเตอร์ในแกนนอน จะได้ดังสมการที่ (2.2)

$$F = F \cos \theta \quad (2.2)$$

จากคุณสมบัติของตรีโกณมิติเมื่อ

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{0a}{0b} \\ 0a &= 0b \sin \theta \\ &= F \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

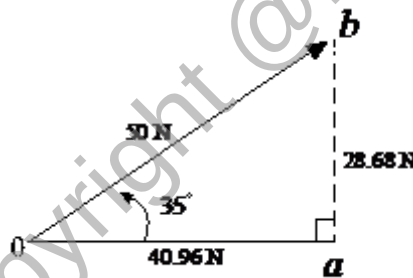
ดังนั้นสามารถเขียนองค์ประกอบของเวกเตอร์ในแกนตั้ง จะได้สมการที่ (2.3)

$$F = F \sin \theta \quad (2.3)$$

ตัวอย่างที่ 2.4 จงแก้ปัญหของเวกเตอร์แรงเท่ากับ 50 N ที่มุม 35° ที่ห่างจากแกนตั้งและภายในแกนนอนที่มีองค์ประกอบของแกนตั้ง

วิธีทำ

องค์ประกอบ 1 ของเวกเตอร์แรงในแกนนอน 50 N คือเวกเตอร์ $0a = 50 \cos 35^\circ = 40.96 \text{ N}$
 องค์ประกอบของเวกเตอร์แรงในแกนตั้ง 50 N คือเวกเตอร์ $ab = 50 \sin 35^\circ = 28.68 \text{ N}$ ดังนั้น
 สามารถเขียนเวกเตอร์ทั้งแกนนอนและแกนตั้งได้ดังรูปที่ 2.15



รูปที่ 2.15 การแยกแรง 50 N เป็นองค์ประกอบตามแกน a และ b

เมื่อตรวจสอบคำตอบโดยใช้สมการตรีโกณมิติ

เมื่อหาขนาด

$$\begin{aligned} ab &= \sqrt{40.96^2 + 28.68^2} \\ &= 50 \text{ N} \end{aligned}$$

เมื่อหามุม

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{28.68}{40.96} \right) \\ &= 35^\circ \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.5 จงแก้ปัญหาของเวกเตอร์อัตราความเร็ว 20m/s ที่ทำมุมห่างจากแกนนอน -30° และภายใน แกนนอนจะมีองค์ประกอบของแกนตั้ง

วิธีทำ

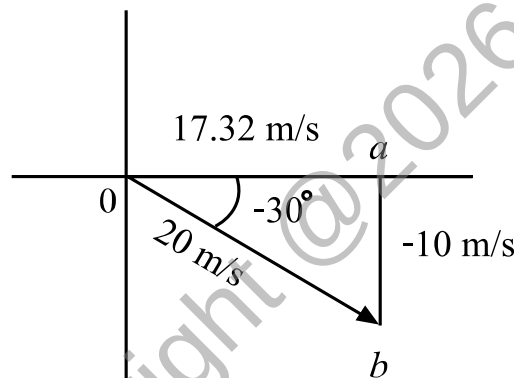
ดังนั้นสามารถหาองค์ประกอบของแกนนอน 20 m/s ของเวกเตอร์อัตราความเร็ว

$$0a = 20 \cos (-30^\circ) = 17.32 \text{ m/s}$$

และสามารถหาองค์ประกอบของแกนนอน 20m/s ของเวกเตอร์อัตราความเร็ว

$$ab = 20 \sin (-30^\circ) = -10 \text{ m/s}$$

จากองค์ประกอบของเวกเตอร์ในแกนนอน และแกนตั้งของอัตราความเร็วสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.16



รูปที่ 2.16 การแยกเวกเตอร์ความเร็ว 20 ms เป็นองค์ประกอบตามแกน a และ b

ตัวอย่างที่ 2.6 จงแก้ปัญหาการย้ายของเวกเตอร์ 40m ที่มุม 120° ห่างจากแกนนอนและองค์ประกอบของแนวตั้ง

วิธีทำ

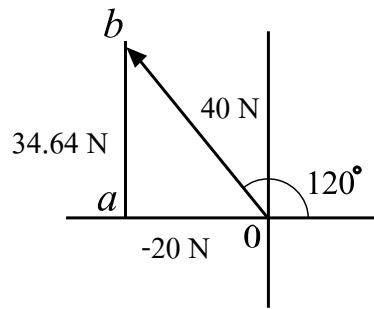
เมื่อองค์ประกอบของการเคลื่อนที่ของเวกเตอร์ 40 m ในแกนนอนสามารถหาได้จาก

$$0a = 40 \cos 120^\circ = -20 \text{ m}$$

เมื่อองค์ประกอบของการเคลื่อนที่ของเวกเตอร์ 40 m ในแกนตั้งสามารถหาได้จาก

$$ab = 40 \sin 120^\circ = 34.64 \text{ m}$$

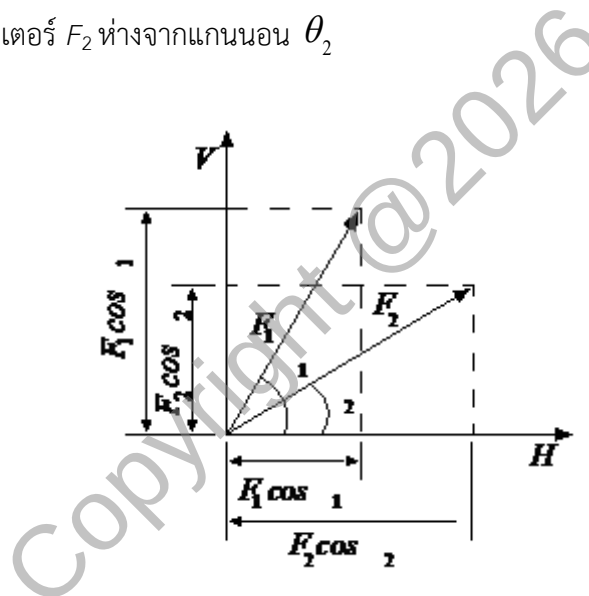
จากองค์ประกอบของเวกเตอร์ในแกนนอนและแกนตั้งของการเคลื่อนที่สามารถแสดงได้ดังเป็นรูปที่ 2.17



รูปที่ 2.17 การแยกแรง 40 N เป็นองค์ประกอบตามแกน a และ b

2.5 การรวมเวกเตอร์โดยการคำนวณ

มีเวกเตอร์แรง F_1 และ F_2 ที่แสดงดังรูปที่ 2.18 และมุมของเวกเตอร์ F_1 ห่างจากแกนนอน θ_1 และ มุมของเวกเตอร์ F_2 ห่างจากแกนนอน θ_2



รูปที่ 2.18 การแยกแรง F_1 และ F_2 เป็นองค์ประกอบในแนวแกน H และ V

เมื่อขนาดของเวกเตอร์ของแกนนอน F_1 คือ $F_1 = F_1 \cos \theta_1$ และ ขนาดของเวกเตอร์ของแกนนอน F_2 ดังสมการที่ (2.4)

$$F_2 = F_2 \cos \theta_2 \quad (2.4)$$

ดังนั้นสามารถรวมเวกเตอร์ในแกนนอน F_1 และ F_2 ได้ดังสมการที่ (2.5)

$$H = F_1 \cos \theta_1 + F_2 \cos \theta_2 \quad (2.5)$$

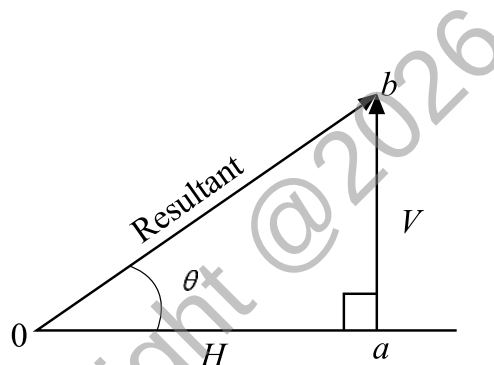
เมื่อขนาดของเวกเตอร์ของแกนตั้ง F_1 คือ $F_1 = F_1 \sin \theta_1$ และ ขนาดของเวกเตอร์ของแกนนอน F_2 ดังสมการที่ (2.6)

$$F_2 = F_2 \sin \theta_2 \quad (2.6)$$

ดังนั้นสามารถรวมเวกเตอร์ในแกนตั้ง F_1 และ F_2 ได้ดังสมการที่ (2.7)

$$H = F_1 \sin \theta_1 + F_2 \sin \theta_2 \quad (2.7)$$

ดังนั้นเมื่อหาขนาดผลรวมของเวกเตอร์ตั้งแนวแกนนอน H และแกนตั้ง V จะได้ขนาด ของ Resultant คือ $\sqrt{H^2 + V^2}$ และมุม $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{V}{H} \right)$ ซึ่งจากขนาด และมุมสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.19

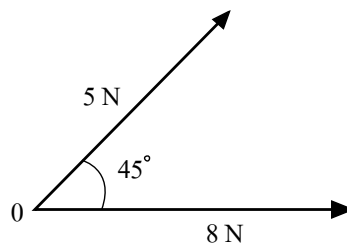


รูปที่ 2.19 เวกเตอร์ลัพธ์ (Resultant) และองค์ประกอบในแนวราบ H และแนวตั้ง V

ตัวอย่างที่ 2.7 มีขนาดของแรง 5 N ทำมุม 45° กับขนาดของแรง 8 N ที่แรงทั้งคู่กระทำต่อดัน จงคำนวณหา ขนาด ผลรวมของแรง

วิธีทำ

จากโจทย์สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างแรงได้ดังรูปที่ 2.20



รูปที่ 2.20 การรวมเวกเตอร์ของแรง 5 N และ 8 N

เมื่อหาขนาดขององค์ประกอบในแนวนอนของเวกเตอร์แรง 8 N จะได้ $8 \cos 0^\circ$ และ เมื่อหาขนาดขององค์ประกอบในแนวนอนของเวกเตอร์แรง 5 N จะได้ $5 \cos 45^\circ$ ดังนั้นเมื่อหาผลรวมของขนาดในแนวนอนจะได้

$$\begin{aligned} H &= 8 \cos 0^\circ + 5 \cos 45^\circ \\ &= 8 + 3.5355 \\ &= 11.5355 \end{aligned}$$

เมื่อหาขนาดขององค์ประกอบในแนวตั้งของเวกเตอร์แรง 8 N จะได้ $8 \sin 0^\circ$ และ เมื่อหาขนาดขององค์ประกอบในแนวตั้งของเวกเตอร์แรง 5 N จะได้ $5 \sin 45^\circ$ ดังนั้นเมื่อหาผลรวมของขนาดในแนวตั้งจะได้

$$\begin{aligned} V &= 8 \sin 0^\circ + 5 \sin 45^\circ \\ &= 0 + 3.5355 \\ &= 3.5355 \end{aligned}$$

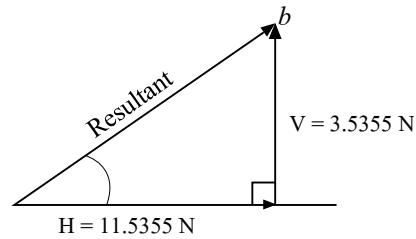
จากนั้นหาผลลัพธ์ของเวกเตอร์แนวนอน และแนวตั้งจะได้

$$\begin{aligned} \text{Resultant} &= \sqrt{H^2 + V^2} \\ &= \sqrt{11.5355^2 + 3.5355^2} \\ &= 12.07 \text{ N} \end{aligned}$$

จากนั้นหาทิศทางหรือมุมของผลรวมเวกเตอร์จะได้

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{3.5355}{11.5355} \right) \\ &= \tan^{-1} 0.30648866 \\ &= 17.04^\circ \end{aligned}$$

ทั้งขนาดแรงรวม และทิศทางสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.21



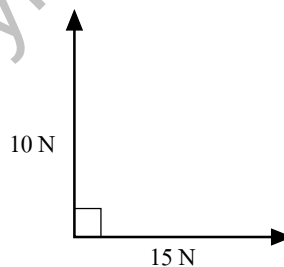
รูปที่ 2.21 การหาแรงลัพธ์ของแรง 5 N และ 8 N

หรือการหาผลรวมของเวกเตอร์สามารถหาได้โดยใช้หลักการของจำนวนเชิงซ้อนดังวิธีการหาต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 \text{resultant} &= 8\angle 0^\circ + 5\angle 45^\circ \\
 &= (8 \cos 0^\circ + j8 \sin 0^\circ) + (5 \cos 45^\circ + j5 \sin 45^\circ) \\
 &= (8 + j0) + (3.536 + j3.536) \\
 &= (11.536 + j3.536)
 \end{aligned}$$

$$\text{หรือ} = 12.07\angle 17.04^\circ$$

ตัวอย่างที่ 2.8 มีแรง 15 N และ 10 N ทำมุมตั้งฉาก 90° ที่แสดงดังรูปที่ 2.22 จงคำนวณหา ขนาดแรงรวม และทิศทาง



รูปที่ 2.22 แผนภาพเวกเตอร์แรงในแนวแกนตั้งฉาก 10 N และ 15 N

วิธีทำ องค์ประกอบแนวแกนนอนของเวกเตอร์ 15 N เท่ากับ $15\cos 0^\circ$ และองค์ประกอบแนวแกนนอนของเวกเตอร์ 10 N เท่ากับ $10 \cos 90^\circ$ ดังนั้นสามารถหาผลรวมของเวกเตอร์ในแนวแกนนอนจะได้

$$\begin{aligned}
 H &= 15 \cos 0^\circ + 10\cos 90^\circ \\
 &= 15 + 0 \\
 &= 15
 \end{aligned}$$

องค์ประกอบแนวแกนนอนของเวกเตอร์ 5 N เท่ากับ $15\sin 0^\circ$ และองค์ประกอบแนวแกนตั้งของเวกเตอร์ 10 N เท่ากับ $10\sin 90^\circ$ ดังนั้นสามารถหาผลรวมของเวกเตอร์ในแนวแกนนอนจะได้

$$\begin{aligned} V &= 15 \sin 0^\circ + 10\sin 90^\circ \\ &= 0 + 10 \\ &= 10 \end{aligned}$$

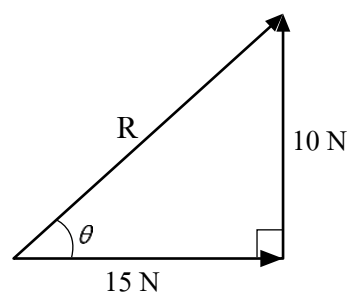
ดังนั้นสามารถหาขนาดของผลรวมเวกเตอร์

$$\begin{aligned} &= \sqrt{H^2 + V^2} \\ &= \sqrt{15^2 + 10^2} \\ &= 18.03 \text{ N} \end{aligned}$$

และสามารถหาทิศทางหรือมุมของผลรวมเวกเตอร์ได้

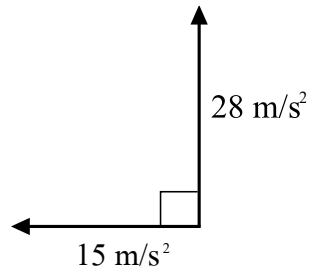
$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{V}{H}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{10}{15}\right) \\ &= 33.69^\circ \end{aligned}$$

และสามารถแสดงขนาดและมุมได้ดังรูปที่ 2.23



รูปที่ 2.23 การหาขนาด และทิศทางของแรงลัพธ์ R และ มุม θ จากแรงตั้งฉาก

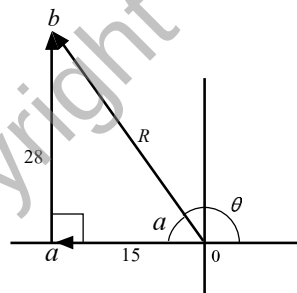
ตัวอย่างที่ 2.9 จงคำนวณหาขนาดและทิศทางองค์ประกอบเวกเตอร์ความเร่งแสดงในรูปที่ 2.24



รูปที่ 2.24 แผนภาพเวกเตอร์ความเร่งในแนวแกนตั้งฉาก

วิธีทำ

ขนาดของเวกเตอร์ในแกนนอน $0a$ ในรูปที่ 2.24 เท่ากับ 15 m/s^2 และจากส่วนปลายของเวกเตอร์ $0a$ คือเวกเตอร์ ab ที่มีขนาดเท่ากัน 28 m/s^2 และทั้งสองเวกเตอร์ทำมุม 90° และสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.25



รูปที่ 2.25 เวกเตอร์ลัพธ์จากองค์ประกอบในแกนลบของระนาบพิกัด

ผลรวมของความเร่ง (R) คือความยาวเวกเตอร์ $0b$ ดังรูปที่ 2.25 และสามารถหาผลรวมได้

$$0b = \sqrt{15^2 + 28^2} = 31.76 \text{ m/s}^2$$

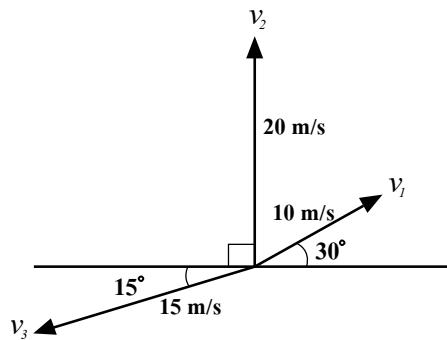
และทิศทาง

$$a = \tan^{-1} \left(\frac{28}{15} \right) = 61.82^\circ$$

หรือ

$$\theta = 180^\circ - 61.82^\circ = 118.18^\circ$$

ตัวอย่างที่ 2.10 อัตราความเร็ว 10m/s, 20 m/s และ 15 m/s ดังแสดงในรูปที่ 2.26 จงคำนวณหาขนาด ผลรวมเวกเตอร์และทิศทาง



รูปที่ 2.26 การเคลื่อนที่ของวัตถุด้วยเวกเตอร์ความเร็วในแนวแกน v_1 และ v_3

วิธีทำ

เมื่อองค์ประกอบในแกนนอนของเวกเตอร์อัตราเร็ว 10 m/s ซึ่งมีขนาดอัตราเร็วเท่ากับ $10\sin 30^\circ = 8.66\text{m/s}$ และ องค์ประกอบในแกนนอนของเวกเตอร์อัตราเร็ว 20m/s ซึ่งมีขนาดอัตราเร็วเท่ากับ $20\sin 90^\circ = 0\text{m/s}$ และ องค์ประกอบในแกนนอนของเวกเตอร์อัตราเร็ว 15 m/s ซึ่งมีขนาดอัตราเร็วเท่ากับ $15\sin 195^\circ = -14.489\text{m/s}$ ดังนั้นจะได้ผลรวมของขนาดในแกนนอนของเวกเตอร์ อัตราเร็ว

$$H = 8.66 + 0 - 14.489 = - 5.829 \text{ m/s}$$

เมื่อองค์ประกอบในแกนตั้งของเวกเตอร์อัตราเร็ว 10m/s ซึ่งมีขนาดอัตราเร็วเท่ากับ $10\sin 30^\circ = 5\text{m/s}$ และองค์ประกอบในแกนตั้งของเวกเตอร์อัตราเร็ว 20m/s ซึ่งมีขนาดอัตราเร็วเท่ากับ $20\sin 90^\circ = 20\text{m/s}$ และองค์ประกอบในแกนตั้งของเวกเตอร์อัตราเร็ว 20 m/s ซึ่งมีขนาดอัตราเร็วเท่ากับ $15\sin 195^\circ = -3.882 \text{ m/s}$

ดังนั้นจะได้ผลรวมของขนาดในแกนตั้งของเวกเตอร์อัตราเร็ว

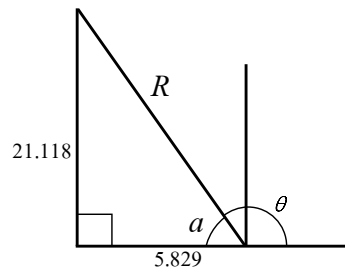
$$V = 5 + 20 - 3.882 = 21.118 \text{ m/s}$$

จากรูปที่ 2.27 สามารถหาผลรวมของเวกเตอร์

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{H^2 + V^2} \\ &= \sqrt{5.829^2 + 21.118^2} \\ &= 21.91 \text{ m/s} \end{aligned}$$

และสามารถคำนวณหาทิศทางได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{21.118}{5.829} \right) \\ &= 74.57^\circ \end{aligned}$$



รูปที่ 2.27 สามเหลี่ยมมุมฉากแสดงเวกเตอร์ R และมุม θ พร้อมด้านประกอบ α

การหาผลรวมของเวกเตอร์และทิศทางสามารถทำได้ด้วยจำนวนเชิงซ้อน

$$\text{resultant} = 10\angle 30^\circ + 20\angle 90^\circ + 15\angle 195^\circ$$

$$= (10 \cos 30^\circ + j10 \sin 30^\circ) + (20 \cos 90^\circ + j20 \sin 90^\circ)$$

$$+ (15 \cos 195^\circ + j15 \sin 195^\circ)$$

$$= (8.66 + j5) + (0 + j20.00) + (-14.489 - j3.882)$$

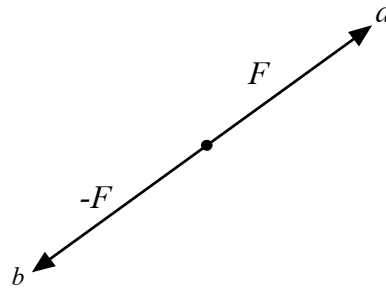
$$= (-5.829 + j21.118) \text{ N}$$

หรือ

$$= 21.91\angle 105.43^\circ \text{ N}$$

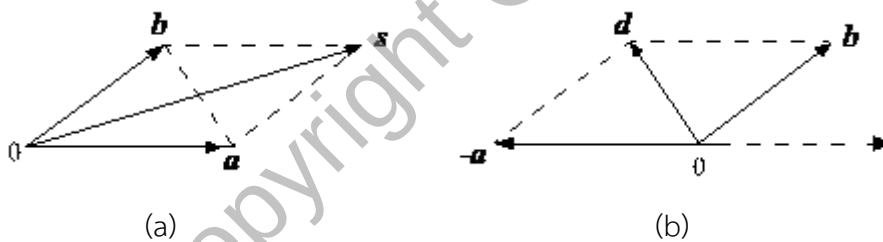
2.6 การลบเวกเตอร์

ในรูปที่ 2.28 แสดงเวกเตอร์ของแรงประกอบด้วย เวกเตอร์ $0a$ และทิศทางตรงข้ามคือ เวกเตอร์ $(-0a)$ ซึ่งทิศทางทั้งสองสามารถเขียนดังรูปที่ 2.28 ที่แสดงทิศทางที่ตรงกันข้าม



รูปที่ 2.28 เวกเตอร์แรงคู่ตรงข้าม F และ $-F$ บนแนวเดียวกัน

ในรูปที่ 2.29 แสดงเวกเตอร์สองทิศทางที่จุดเดียวกัน ในรูปที่ 2.29 (a) แสดงการรวมเวกเตอร์ $os = oa + ob$ และในรูปที่ 2.29(b)แสดงการรวมเวกเตอร์ $ob + (-oa)$ นั่นคือ $ob - oa$ และสามารถเขียนเป็นสมการของการรวมเวกเตอร์ได้ $ob - oa = od$



รูปที่ 2.29 การบวกเวกเตอร์ด้วยวิธีสามเหลี่ยม และสี่เหลี่ยมด้านขนาน (Triangle and Parallelogram Methods) (a) การบวกเวกเตอร์ด้วยกฎสี่เหลี่ยมด้านขนาน (b) การลบเวกเตอร์ หรือการบวกเวกเตอร์ตรงข้าม

ตัวอย่างที่ 2.11 อัตราการเร่งของเวกเตอร์ $a_1 = 1.5\text{m/s}^2$ ที่มุม 90° และ $a_2 = 2.6\text{m/s}^2$ ที่มุม 145° จงหาค่า

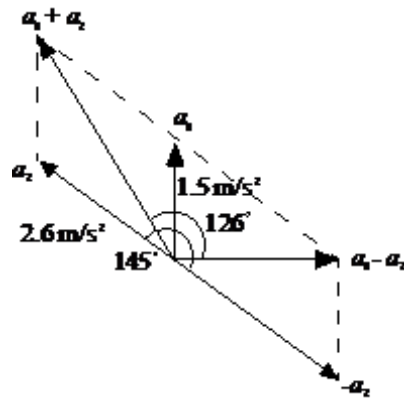
- (a) เขียนผลรวมของเวกเตอร์ $a_1 + a_2$ และ $a_1 - a_2$
- (b) คำนวณหาผลรวมของเวกเตอร์ $a_1 + a_2$ และ $a_1 - a_2$

วิธีทำ (a) การเขียนผลรวมของเวกเตอร์ และสเกลสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.30

$$a_1 + a_2 = 3.7\text{m/s}^2 \text{ ที่มุม } 126^\circ$$

และ

$$a_1 - a_2 = 2.1 \text{ m/s}^2 \text{ ที่มุม } 0^\circ$$



รูปที่ 2.30 การบวก และลบเวกเตอร์ความเร่ง a_1 และ a_2

(b) เมื่อหาผลรวมขององค์ประกอบในแกนนอน $a_1 + a_2$

$$H = 1.5 \cos 90^\circ + 2.6 \cos 145^\circ = -2.13$$

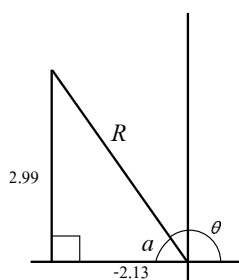
และหาผลรวมขององค์ประกอบในแกนตั้ง $a_1 + a_2$

$$V = 1.5 \sin 90^\circ + 2.6 \sin 145^\circ = 2.99$$

และทั้งผลรวมขององค์ประกอบเวกเตอร์ในแนวแกนนอนและแกนตั้งสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.31

เมื่อหาผลรวมของขนาด (Resultant) จะได้

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{H^2 + V^2} \\ &= \sqrt{(-2.13)^2 + 2.99^2} \\ &= 3.76 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



รูปที่ 2.31 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากแสดงเวกเตอร์ R และมุม θ

จากรูปที่ 2.31 เมื่อหามุมจะได้

$$a = \tan^{-1} \left(\frac{2.99}{2.13} \right) = 54.33^\circ$$

และ

$$a = 180^\circ - 54.33^\circ = 125.47^\circ$$

ดังนั้นเมื่อ $a_1 + a_2 = 3.67 \text{ m/s}^2$ ที่มุม 125.47°

เมื่อหาค่าประกอบในแกนนอนของ $a_1 - a_2 = 1.5 \cos 90^\circ - 2.6 \cos 145^\circ$ และหาค่าประกอบในแกนตั้งของ $a_1 - a_2 = 1.5 \sin 90^\circ - 2.6 \sin 145^\circ = 0$

$$\text{และเมื่อหาขนาดของ } a_1 - a_2 = \sqrt{2.13^2 + 0^2} = 2.13 \text{ m/s}^2$$

$$\text{เมื่อหามุมของ } a_1 - a_2 = \tan^{-1} \left(\frac{0}{2.13} \right) = 0^\circ$$

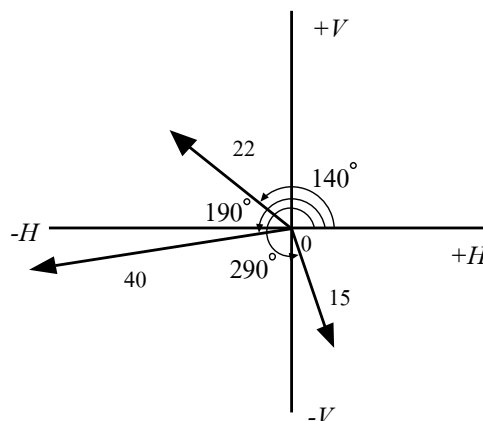
ดังนั้น $a_1 - a_2 = 2.13 \text{ m/s}^2$ ที่ 0°

ตัวอย่างที่ 2.12 จากรูปที่ 2.32 จงคำนวณหาผลรวมของเวกเตอร์ดังต่อไปนี้เมื่อกำหนดให้

$$v_1 = 22 \angle 140^\circ, v_2 = 40 \angle 190^\circ \text{ และ } v_3 = 15 \angle 290^\circ$$

(a) $v_1 - v_2 + v_3$

(b) $v_1 - v_2 - v_3$



รูปที่ 2.32 แผนภาพเวกเตอร์แรงหลายแรงในระบบพิกัดแกน H และ V

วิธีทำ

(a) จากเวกเตอร์ในรูปที่ 2.32 เมื่อหาผลรวมเวกเตอร์ขององค์ประกอบในแกนนอน V ,

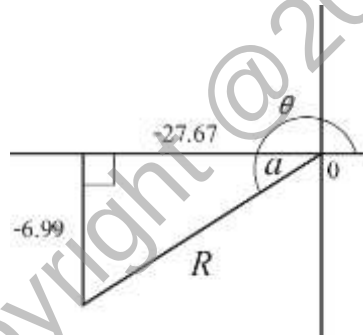
$$\begin{aligned}v_1 - v_2 + v_3 &= (22 \cos 140^\circ) - (40 \cos 190^\circ) + (15 \cos 290^\circ) \\&= (-16.85) - (-6.95) + (5.13) \\&= 27.67 \text{ units}\end{aligned}$$

เมื่อหาผลรวมเวกเตอร์ขององค์ประกอบในแกนตั้ง

$$\begin{aligned}v_1 - v_2 + v_3 &= (22 \sin 140^\circ) - (40 \sin 190^\circ) + (15 \sin 290^\circ) \\&= (-14.14) - (-6.95) + (-14.10) \\&= 6.99 \text{ units}\end{aligned}$$

และเมื่อผลรวมของเวกเตอร์ในแนวแกนนอนกับแกนตั้งจะได้ดังรูปที่ 2.33

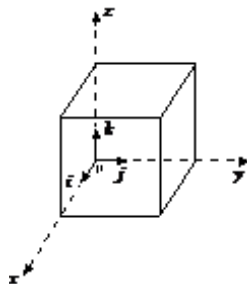
ตอบ $R = \sqrt{27.67^2 + 6.99^2} = 28.54 \text{ units}$



รูปที่ 2.33 การหาขนาด และทิศทางของเวกเตอร์จากส่วนประกอบในระบบพิกัด

2.7 เวกเตอร์ 3 มิติบนแกนนอน i, j และ k

จากรูปที่ 2.34 แสดงทิศทางของเวกเตอร์ 3 แกนประกอบด้วยเวกเตอร์ตั้งอยู่บนแกน x เวกเตอร์ j ตั้งอยู่บนแกน y และเวกเตอร์ k ตั้งอยู่บนแกน z โดยเวกเตอร์ i, j และ k เป็นเวกเตอร์หน่วย



รูปที่ 2.34 ระบบพิกัดคาร์ทีเซียนสามมิติแสดงแกน x, y, z และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย i, j, k

ตัวอย่างที่ 2.13 จงหาผลลบของ $(3i + 2j + 2k) - (4i - 3j + 2k)$

วิธีทำ

$$(3i + 2j + 2k) - (4i - 3j + 2k) = 3i + 2j + 2k - 4i + 3j - 2k$$

ตอบ $(3i + 2j + 2k) - (4i - 3j + 2k) = -i + 5j$

ตัวอย่างที่ 2.14 เมื่อกำหนดให้ $p = 3i + 2j$, $q = 4i - 2j + 3k$ และ $r = -3i + 5j - 4k$

จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

(a) $-r$

(b) $3p$

(c) $2p + 3q$

(d) $-p + 2r$

(e) $0.2p + 0.6q - 3.2r$

วิธีทำ

(a)

$$-r = -(-3i + 5j + 4k) = 3i + 2j + 2k - 4i + 3j - 2k$$

ตอบ $-r = +3i - 5j + 4k$

(b)

$$3p = 3(3i + 2k)$$

ตอบ $3p = 9i + 6k$

(c)

$$2p + 3q = 3(-3i + 2k) + 3(4i - 2j + 3k)$$

$$= 6i + 4k + 12j - 6j + 9k$$

ตอบ $2p + 3q = 18i - 6j + 13k$

(d)

$$-p + 2r = -(3i + 2k) + 2(-3i + 5j - 4k)$$

$$= -3i - 2k + (-6i + 10j - 8k)$$

ตอบ $-p + 2r = -9i + 10j - 10k$

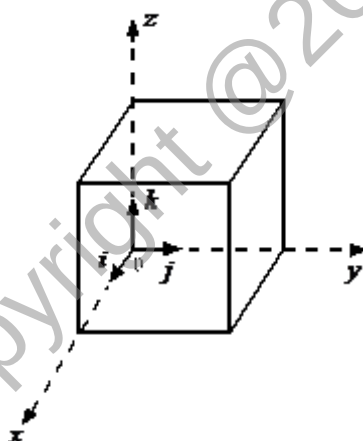
(e)

$$\begin{aligned}0.2p + 0.6q - 3.2r &= 0.2(3i + 2k) + 0.6(4i - 2j + 3k) - 3.2(-3i + 5j - 4k) \\&= 0.6i + 0.4k + 2.4j - 1.2j + 1.8k + 9.6i - 16j + 12.8k\end{aligned}$$

ตอบ $0.2p + 0.6q - 3.2r = 12.6i - 17.2j + 15k$

2.8 การคูณสเกลาร์ และเวกเตอร์

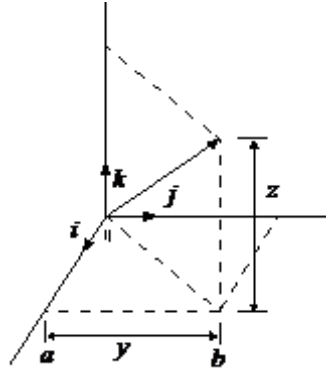
เมื่อเวกเตอร์ x ของขนาด x หน่วย และทิศทาง θ° ถูกหารโดยขนาดของเวกเตอร์ จะได้ผลลัพธ์คือหน่วยความยาวที่ มุม θ° เมื่อหน่วยเวกเตอร์สำหรับอัตราเร็วของ 10 m/s ที่ 50° คือ $(10 \text{ m/s at } 50^\circ) / (10 \text{ m/s})$ จะได้ 1 ที่ 50° โดยทั่วไปแล้วหน่วยของเวกเตอร์สำหรับ oa คือ $oa/|oa|$ เมื่อ oa คือจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ที่มีทั้งขนาดและทิศทาง จากรูปที่ 2.35 แสดงทิศทางของเวกเตอร์ 3 หน่วย ที่ประกอบด้วย 3 แกนได้แก่แกน x , y และ z



รูปที่ 2.35 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยและรูปลูกบาศก์ในปริภูมิ 3 มิติ

และในรูปที่ 2.36 พิจารณาทิศทางของเวกเตอร์ทางทิศทางจาก o ถึง r และเวกเตอร์ x หน่วย คือเวกเตอร์ ของแกน i ที่ตำแหน่ง o ถึง a ดังนั้นเวกเตอร์ y หน่วย มีทิศทางจาก a ถึง b ที่มีทิศทางในแกน j ดังนั้น เวกเตอร์ z หน่วย มีทิศทางจาก b ถึง r ที่มีทิศทางในแกน k เพราะฉะนั้นสามารถเขียนคำจำกัดความของเวกเตอร์ or ดังสมการที่ (2.8)

$$or = xi + yj + zk \quad (2.8)$$



รูปที่ 2.36 การแยกเวกเตอร์สามมิติ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย i, j และ k

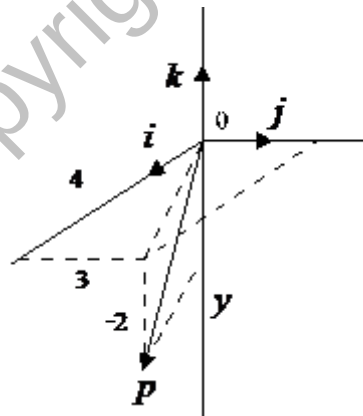
ตัวอย่างที่ 2.15 จงวาดภาพของเวกเตอร์ 3 หน่วย

(a) $op = 4i + 3j - 2k$

(b) $or = 5i - 2j + 2k$

วิธีทำ (a) สามารถเขียนเวกเตอร์ $op = 4i + 3j - 2k$ ดังรูปที่ 2.37 (a)

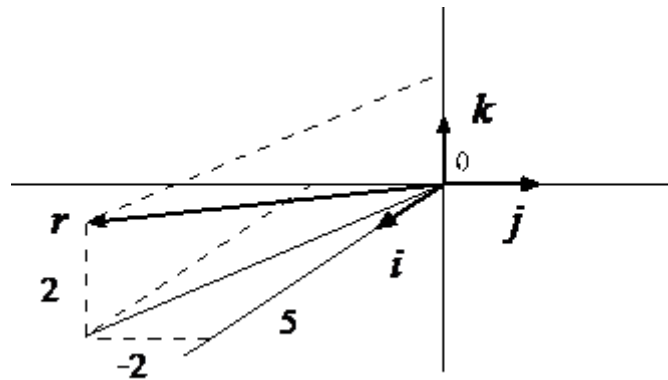
ตอบ



รูปที่ 2.37 (a)

(b) สามารถเขียนเวกเตอร์ $or = 5i - 2j + 2k$ ดังรูปที่ 2.37 (b)

ตอบ



รูปที่ 2.37(b)

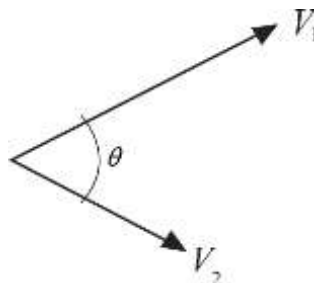
2.9 ผลคูณเวกเตอร์ของสองเวกเตอร์

เมื่อผลคูณของเวกเตอร์ oa คือผลการคูณจำนวนสเกลาร์หรือเรียกค่า k ซึ่งขนาดของผลลัพธ์จะเป็น k เท่า ดังนั้นผลรวมของ $2 \times (5N \text{ ที่ } 20^\circ)$ ในเวกเตอร์ของขนาด $10N$ ที่ 20° หนึ่งในผลคูณเวกเตอร์ ของสองเวกเตอร์เรียกว่าสเกลาร์หรือผลคูณจุดของเวกเตอร์ (dot product) และสามารถเขียนผลคูณจุดของ เวกเตอร์ oa และ ob เมื่อ มุม $\theta_2 > \theta_1$ ได้ดังสมการที่ (2.9)

$$oa \cdot ob = oa \cdot ob \cos(\theta_2 > \theta_1) \quad (2.9)$$

สำหรับเวกเตอร์ v_1 และ v_2 ที่แสดงในรูปที่ 2.38 และสามารถเขียนสมการของการคูณเวกเตอร์แบบจุดดัง สมการที่ (2.10)

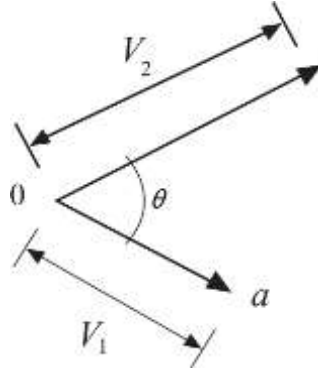
$$v_1 \cdot v_2 = v_1 v_2 \cos \theta \quad (2.10)$$



รูปที่ 2.38 การทำมุม θ ระหว่างเวกเตอร์ v_1 และ v_2

กฎการเปลี่ยน (Commutative law) ทางพีชคณิต เช่น $a \times b = b \times a$ ที่ประยุกต์เป็นผลการคูณจุดเวกเตอร์ ที่สามารถแสดงได้ในรูปที่ 2.39

$$Oa \times ob = v_1 v_2 \cos \theta \quad (2.11)$$

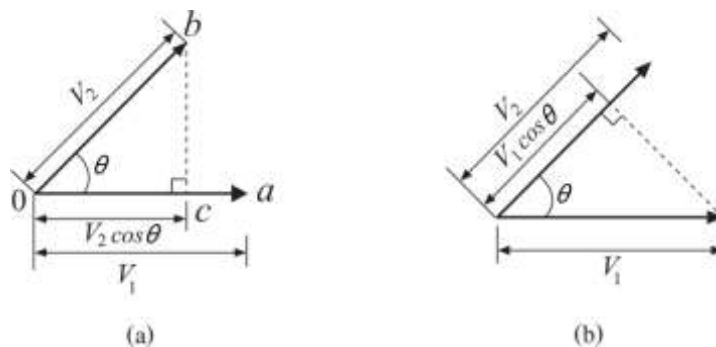


รูปที่ 2.39 ขนาด และมุมระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์

ในทำนองเดียวกัน $oa \times ob = v_1 v_2 \cos \theta = v_1 v_2 \cos \theta$ โดยใช้กฎการเปลี่ยนของพีชคณิต ดังนั้นจะได้ $oa \times ob = ob \times oa$ และการแสดงทิศทางของเวกเตอร์ ob บน เวกเตอร์ oa ที่แสดงในรูปที่ 2.40(a) และโดยเรขาคณิตของสามเหลี่ยม obc เนื่องจากคำจำกัดความดังสมการที่ (2.12)

$$Oa \times ob = v_1 (v_2 \cos \theta) \quad (2.12)$$

เมื่อ $oa \times ob = v_1$ (การแสดงทิศทางของ v_2 บน v_1)



รูปที่ 2.40 เงามายของเวกเตอร์ (Vector Projections) (a) การฉาย V_2 ลงบนแนวแกน V_1
(b) การฉาย V_1 ลงบนแนวแกน V_2

ในทำนองเดียวกัน ทิศทางของเวกเตอร์ oa บนเวกเตอร์ ob แสดงในรูปที่ 2.40(b) คือ $v_1 \cos \theta$ ดังนั้นสามารถให้คำจำกัดความได้ดังสมการที่ (2.13)

$$oaxob = v_2(v_1 \cos \theta) \quad (2.13)$$

นี่คือการแสดงการคูณเวกเตอร์แบบจุดของสองเวกเตอร์คือการคูณกันทั้งขนาดและทิศทาง และมุมทั้งสอง ของขนาดเวกเตอร์สามารถแสดงได้ในเทอมของ $oxb = ab \cos \theta$ ดังนั้นจะได้ดังสมการที่ (2.14)

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{ab} \quad (2.14)$$

ให้ $a = a_1i + a_2j + a_3k$

และ $b = b_1i + b_2j + b_3k$

$$a \cdot b = (a_1i + a_2j + a_3k) \cdot (b_1i + b_2j + b_3k)$$

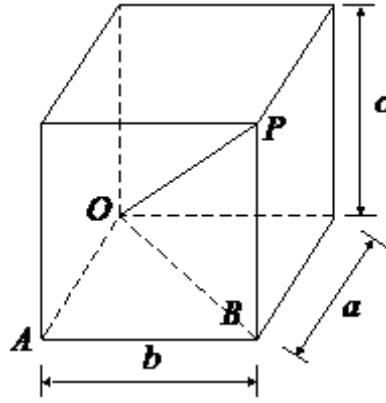
เมื่อทำการคูณจะได้

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a_1b_1ixi + a_1b_2jxj + a_1b_3kxk \\ &+ a_2b_1ixi + a_2b_2jxj + a_2b_3kxk \\ &+ a_3b_1ixi + a_3b_2jxj + a_3b_3kxk \end{aligned}$$

อย่างไรก็ตามเวกเตอร์หน่วย i, j และ k ทั้งหมดมีขนาด 1 หน่วย และ $ixj = (1)(1) \cos 0^\circ = 1$, $ixj = (1)(1) \cos 90^\circ = 0$, $ixj = (1)(1) \cos 90^\circ = 0$ และในทำนองเดียวกัน $ixj = 1$, $jxk = 0$, และ $kxi = 0$ ดังนั้นเทอมที่ไม่เป็นศูนย์สามารถแสดงการคูณเวกเตอร์แบบจุดได้ดังสมการที่ (2-15)

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad (2.15)$$

ทั้ง a และ b ในสมการที่ (2.15) สามารถแสดงในเทอมของ a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 และ b_3



รูปที่ 2.41 เส้นทแยงมุมหลักของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

รูปทรงเรขาคณิตในรูปที่ 2.41 ความยาวในเส้นทแยง คือเส้นตรง OP ในเทอมของความยาวด้าน a, b และ c สามารถหาได้โดยใช้ทฤษฎีพythากอรัส (Pythagoras' theorem) แสดงในเทอมต่อไปนี้

$$OP^2 = OB^2 + BP^2 \text{ และ } OB^2 = OA^2 + AB^2$$

$$\text{ดังนั้น } OP^2 = OA^2 + AB^2 + BP^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2$$

ดังนั้นจะได้เส้นตรง OP แสดงในสมการที่ (2.16)

$$OP = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} \quad (2.16)$$

เพราะฉะนั้นจะได้ความความสัมพันธ์ของสองเวกเตอร์ $a_1i + a_2j + a_3k$ และ $b_1i + b_2j + b_3k$ เมื่อให้

$$a = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$$

และ

$$b = \sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}$$

เมื่อทำการแทนค่า a และ b จากสมการที่ (2.15) จะได้ค่ามุมดังสมการที่ (2.17)

$$\cos \theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}\sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}} \quad (2.17)$$

ตัวอย่างที่ 2.16 จงหาเวกเตอร์ a ที่เชื่อมต่อกับจุด P และ Q เมื่อจุด P มีตำแหน่ง $(4, -1, 3)$ และจุด Q มี ตำแหน่ง $(2, 5, 0)$ และหาขนาด $|a|$ และค่าเฉลี่ยของ a

วิธีทำ กำหนดให้จุดเริ่มต้น ที่ตำแหน่ง $(0, 0, 0)$ ดังนั้นจะได้ตำแหน่งของเวกเตอร์ P และ Q ดังนี้

$$OP = 4i - j + 3k$$

และ

$$OQ = 2i + 5j$$

ดังนั้นจะได้ $a = PQ = OQ - OP$

และ

$$a = PQ = (2i + 5j) - (4i - j + 3k)$$

$$= -2i + 6j - 3k$$

$$|a| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{49}$$

ตอบ $|a| = 7$

ตัวอย่างที่ 2.17 ถ้า $p = 2i + j - k$ และ $q = i - 3j + 2k$ จงหา

(a) $p \times q$ (b) $p + q$ (c) $|p + q|$ (d) $|p| + |q|$

วิธีทำ (a) เมื่อ $p = a_1i + a_2j + a_3k$ และ $q = b_1i + b_2j + b_3k$

ดังนั้นเมื่อ $p \times q = a_1b_2 - a_2b_1 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_3b_1 - a_1b_3$

เมื่อ $q = i - 3j + 2k$ ดังนั้น $b_1 = 1, b_2 = -3$ และ $b_3 = 2$

เมื่อทำการแทนค่าแล้วจะได้

$$p \times q = (2)(1) + (1)(-3) + (-1)(2)$$

ตอบ $p \times q = 3$

$$(b) \quad p + q = (2i + j - k) + (i - 3j + 2k)$$

$$\text{ตอบ} \quad p + q = 3i - 2j + k$$

$$(c) \quad |p + q| = |3i - 2j + k|$$

$$|p + q| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$\text{ตอบ} \quad |p + q| = \sqrt{14}$$

$$(d) \quad |p| = |2i + j - k|$$

$$= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$|q| = |i - 3j + 2k|$$

$$= \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

ดังนั้นจะได้

$$\text{ตอบ} \quad |p| + |q| = \sqrt{6} + \sqrt{14} = 6.191$$

ตัวอย่างที่ 2.18 จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ oa และ ob เมื่อ $oa = i + 2j - 3k$ และ $ob = 2i - j + 4k$

วิธีทำ เมื่อสมการสำหรับ $\cos \theta$ สามารถหาได้ดังสมการ

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} \sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}}$$

$$\text{เมื่อ } oa = i + 2j - 3k$$

$$a_1 = 1, a_2 = 2 \text{ และ } a_3 = -3$$

$$\text{เมื่อ } ob = 2i - j + 4k$$

$$b_1 = 2, b_2 = -1 \text{ และ } b_3 = 4$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าและสามารถหามุมได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{(1 \times 2) + (2 \times -1) + (-3 \times 4)}{\sqrt{(1^2 + 2^2 + (-3)^2)} \sqrt{(2^2 + (-1)^2 + 4^2)}} \\ &= \frac{-12}{\sqrt{14} \sqrt{21}} \\ &= -0.6999\end{aligned}$$

ตอบ มุมต่างเฟสของเวกเตอร์ = 225.6°

2.10 ทิศทางของโคไซน์

มีเวกเตอร์ $or = xi + yj + zk$ และขนาด $|or| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ถ้าเวกเตอร์ or ทำมุม α, β และ γ กับแกน i, j และ k ตามลำดับ และเมื่อแทนค่าหามุมจะได้ดังสมการที่ (2.18) ถึง (2.20)

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \quad (2.18)$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \quad (2.19)$$

และ

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \quad (2.20)$$

ดังนั้นเมื่อ $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ และ $\cos \gamma$ เป็นทิศทางโคไซน์ของเวกเตอร์ or

ตัวอย่างที่ 2.19 จงหาโคไซน์เวกเตอร์ของ $3i + 2j + k$

วิธีทำ

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

ดังนั้นสามารถหาทิศทางโคไซน์ได้จากสมการที่ (2.18) ถึง (2.20)

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = 0.802$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = 0.535$$

และ

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = 0.267$$

เพราะฉะนั้น $\alpha = \cos^{-1} 0.802 = 36.7^\circ$

$$\beta = \cos^{-1} 0.535 = 57.7^\circ$$

และ

$$\gamma = \cos^{-1} 0.267 = 74.5^\circ$$

หมายเหตุ

$$\text{ตอบ } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 0.802^2 + 0.535^2 + 0.267^2 = 1$$

ตัวอย่างที่ 2.20 เมื่อแรงมีค่าคงที่ $F = 10i + 2j - k$ นิวตัน ที่ย้ายจากเวกเตอร์ $A = i + j + k$ ถึง $B = 2i - j + 3k$ เมตร จงหาผลรวมของงาน ในหน่วยนิวตันเมตร

วิธีทำ จากสมการของงาน

$$\text{work done} = F \times d$$

ดังนั้นจากเวกเตอร์ของโจทย์สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.42

$$AB = AO + OB = OB - OA$$

เพราะฉะนั้นจะได้สมการผลรวมของงานคือ $F \times d$ นั่นคือ $F \times AB$ และสามารถหาค่าได้

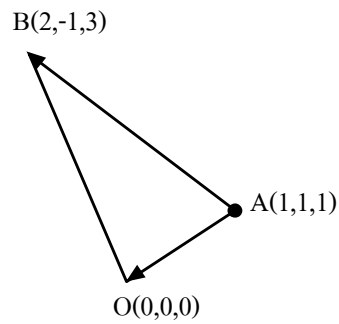
$$\text{work done} = (10i + 2j - k) \times (i - 2j + 2k)$$

แต่จากสมการ

$$P \times q = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

เพราะฉะนั้นจะได้ผลรวมของงาน

$$\text{ตอบ } \text{work done} = (10 + 1) + (2 \times (2)) + ((-1) \times 2) = 4 \text{ Nm}$$

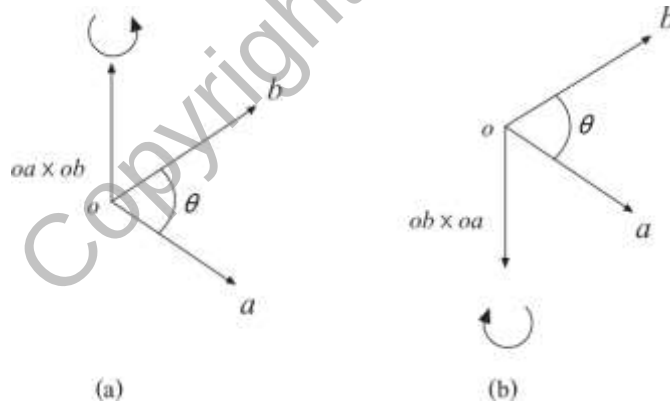


รูปที่ 2.42 พิกัดจุด และเวกเตอร์ระหว่างจุด O, A, และ B ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

2.11 เวกเตอร์โปรดัค

นิยามของเวกเตอร์โปรดัค (Vector products) สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (2.21) เมื่อ θ คือมุมระหว่างสองเวกเตอร์ และสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.43

$$|oa \times ob| = oa \, ob \sin \theta \quad (2.21)$$



รูปที่ 2.43 การหาทิศทางครอสเวกเตอร์ (Vector Cross Product Directions)

(a) การครอสเวกเตอร์ $oa \times ob$ (ทิศพุ่งขึ้น)

(b) การครอสเวกเตอร์ $ob \times oa$ (ทิศพุ่งลง)

$$Oa \times ob = - ob \times oa$$

$$a = a_1i + a_2j + a_3k$$

และ

$$b = b_1i + b_2j + b_3k$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_1i + a_2j + a_3k) \times (b_1i + b_2j + b_3k) \\ &= a_1b_1ixi + a_1b_2ixj + a_1b_3ixk + a_2b_1jxi + a_2b_2jxj + a_2b_3jxk \\ &\quad + a_3b_1kxi + a_3b_2kxj + a_3b_3kxk \end{aligned}$$

แต่จากคำจำกัดความของการคูณเวกเตอร์

$$ixj = k, jxk = i \text{ และ } kxi = j \text{ ในทำนองเดียวกันเมื่อ } ixi = jxj = kxk = (1)(1) \sin 0^\circ = 0$$

จาก $a \times b = -b \times a$ จะได้

$$a \times b = a_1b_2k - a_1b_3j - a_2b_1k + a_2b_3i + a_3b_1j - a_3b_2i$$

เมื่อทำการรวมเทอม i, j และ k เข้าด้วยกันจะได้

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

และสามารถเขียนผลคูณของเวกเตอร์ในรูปของดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant) ดังสมการที่ (2.22)

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

เมื่อดีเทอร์มิแนนท์ 3X3 คือ $\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ หรือ $i \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ เมื่อ

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_3 - a_3b_1$$

และ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

ขนาดของผลการคูณจุดของสองเวกเตอร์ สามารถหาได้โดยการแสดงในรูปของ Scalar product และสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$a \times b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ เมื่อทำการยกกำลังสองทั้งสองข้างของผลการคูณจุดเวกเตอร์จะได้ตั้งสมการที่ (2.23)

$$\begin{aligned} \left(|a \times b| \right)^2 &= a^2 b^2 \sin^2 \theta \\ &= a^2 b^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ \left(|a \times b| \right)^2 &= a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (2.23)$$

จากสมการของ $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{ab}$ และจากนั้นคูณด้วย $a^2 b^2$ ทั้งสองข้างพร้อมทำการยกกำลังสองจะได้

$$a^2 b^2 \cos^2 \theta = \frac{a^2 b^2 (a \cdot b)^2}{a^2 b^2} - (a \cdot b)^2$$

เมื่อแทนค่าในสมการที่ (12) โดย $a^2 = a \times a$, $b^2 = b \times b$ และ $a^2 b^2 \cos^2 \theta = (a \times b)^2$ และให้

$$\left(|a \times b| \right)^2 = (a \times a) (b \times b) - (a \cdot b)^2 \quad (2.24)$$

ตัวอย่างที่ 2.20 สำหรับเวกเตอร์ $a = i + 4j - 2k$ และ $b = 2i - j + 3k$ จงหาค่า

(a) $a \times b$

(b) $|a \times b|$

วิธีทำ

(a) จากสมการที่ (2.22)

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} a \times b &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= i \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= i(12 - 2) - j(3 + 4) + k(-1 - 8) \end{aligned}$$

ตอบ $a \times b = 10i - 7j - 9k$

(b) จากสมการที่ (2.24)

$$|a \times b| = \sqrt{[(a \times a)(b \times b) - (a \times b)^2]}$$

เมื่อ $a \times a = (1)(1) + (4 \times 4) + (-2)(-2)$

$$= 21$$

$$b \times b = (2)(2) + (-1)(-1) + (3)(3)$$

$$= 14$$

$$a \times b = (1)(2) + (4)(-1) + (-2)(3)$$

$$= -8$$

ดังนั้น $|a \times b| = \sqrt{(21 \times 14 - 64)}$

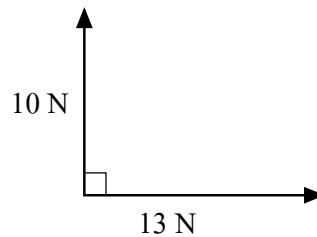
$$= \sqrt{230}$$

ตอบ $|a \times b| = 15.17$

แบบฝึกหัดบทที่ 2

2.1 จงคำนวณหาขนาดและผลรวมของแรงทั้งสอง เมื่อ แรงที่ 1 มีขนาด 7 N ทำมุม 50° และแรงที่ 2 ซึ่งมีขนาด 12 N

2.2 จากรูปที่ 2A จงคำนวณหาขนาดและทิศทาง



รูปที่ 2A

2.3 จงหาผลรวมของเวกเตอร์ $F_1 + F_2$ เมื่อ $F_1 = 40 \text{ N}, \theta_1 = 45^\circ$ และ $F_2 = 30 \text{ N}, \theta_2 = 125^\circ$

2.4 จงหาผลลบของเวกเตอร์ $F_1 - F_2$ เมื่อ $F_1 = 40 \text{ N}, \theta_1 = 45^\circ$ และ $F_2 = 30 \text{ N}, \theta_2 = 125^\circ$

2.5 จงหาผลคูณระหว่างแรง $F_1 = 3i + 4j + 5k$ และ $F_2 = i + j + k$

2.6 จงหา Scalar product ของ $a \times b$ เมื่อ $a = i - 3j + k$ และ $b = 2i + 3j + k$

2.7 จงคำนวณหาผลรวมของเวกเตอร์ $p \times (q + r)$ เมื่อ $p = 2i - 3j, q = 4j - k$ และ $r = i + 2j - 3k$

2.8 จงคำนวณหาผลคูณของเวกเตอร์ $p \times (q + r)$ เมื่อ $p = 3i + 2k, q = i - 2j + 3k$ และ $r = -4i + 3j - k$

2.9 จงหาผลการโปรดัคเวกเตอร์ของ $p \times q$ เมื่อ $p = 4i - j + 2k$ และ $q = -2i + 3j - 2k$

เอกสารอ้างอิง

1. Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2017). *Mathematical methods for physicists: A comprehensive guide* (7th ed.). Academic Press.
2. Griffiths, D. J. (2017). *Introduction to electrodynamics* (4th ed.). Cambridge University Press.
3. Kreyszig, E. (2019). *Advanced engineering mathematics* (11th ed.). Wiley.
4. Spiegel, M. R., Lipschutz, S., Schiller, J. J., & Spellman, D. (2009). *Vector analysis* (2nd ed.). McGraw-Hill Education.
5. Zill, D. G. (2018). *Differential equations with boundary-value problems* (9th ed.). Cengage Learning.
6. Anton, H., & Rorres, C. (2019). *Elementary linear algebra: Applications version* (12th ed.). Wiley.
7. Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2020). *Linear algebra and its applications* (6th ed.). Pearson.
8. Schutz, B. (2009). *A first course in general relativity* (2nd ed.). Cambridge University Press.
9. Boas, M. L. (2020). *Mathematical methods in the physical sciences* (3rd ed.). Wiley.
10. Purcell, E. M., & Morin, D. J. (2013). *Electricity and magnetism* (3rd ed.). Cambridge University Press.
11. Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2011). *Vector calculus* (6th ed.). W. H. Freeman.
12. Hassani, S. (2013). *Mathematical physics: A modern introduction to its foundations* (2nd ed.). Springer.
13. Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (2011). *The Feynman lectures on physics, Volume II: Mainly electromagnetism and matter*. Basic Books.
14. Jackson, J. D. (2021). *Classical electrodynamics* (3rd ed.). Wiley.
15. Taylor, J. R. (2005). *Classical mechanics*. University Science Books.

บทที่ 3

อนุกรมฟูรีเยร์

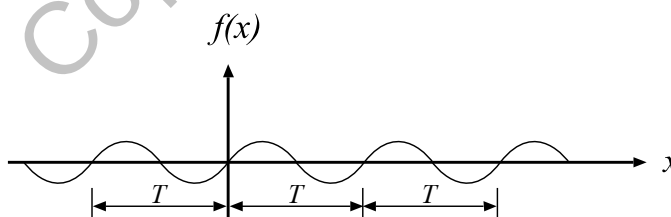
3.1 บทนำ

เนื้อหาในหน่วยนี้จะพิจารณาการใช้อนุกรมฟูรีเยร์หาค่าสัญญาณทางไฟฟ้าที่ไม่ใช่รูปคลื่นไซน์และโคไซน์ซึ่งจะพิจารณาจากสัญญาณรายคาบโดยจะใช้ทฤษฎีอนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier series) แก้ปัญหาในการหาสัญญาณรายคาบแบบซ้ำคาบ (Periodic Function) เช่น ฟังก์ชันสัญญาณแรงดันไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าเป็นต้น ซึ่งฟังก์ชันเหล่านี้สามารถเขียนให้อยู่ในเทอมของสัญญาณไซน์ (Sine) และโคไซน์ (Cosine) ทั้งนี้ฟังก์ชันเหล่านี้ มีความสำคัญมากในการพิจารณาฟังก์ชันอื่น ๆ และสามารถเขียนแทนได้ในเทอมของอนุกรมฟูรีเยร์

3.2 ฟังก์ชันรายคาบ

ฟังก์ชันรายคาบ (Periodic Function) $f(x)$ หมายความว่า เป็นฟังก์ชันของสัญญาณที่มีสัญญาณซ้ำคาบทุก ๆ คาบเวลา (T) ถ้าเมื่อ T คือคาบของสัญญาณถ้า T เป็นค่าจริงใด ๆ และไม่เท่ากับศูนย์ สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (3.1) และแสดงได้ดังรูปที่ 3.1

$$f(x+T) = f(x) \quad (3.1)$$



รูปที่ 3.1 ฟังก์ชันรายคาบ

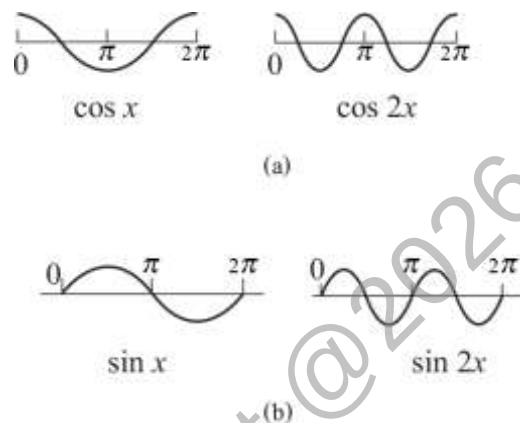
จะเห็นว่าสัญญาณมีคาบครบรอบเท่ากับ T และเกิดซ้ำ ๆ ทุกคาบเวลา T และสามารถกำหนดให้ n คือเลขจำนวนเต็ม ที่สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (3.2)

$$f(x+nT) = f(x) \quad (3.2)$$

ดังนั้น $nT = 2T, 3T, \dots$ เป็นคาบของฟังก์ชัน $f(x)$ ฟังก์ชันก็จะเกิดขึ้นซ้ำกันตามจำนวนรอบของ n ในทุกฟังก์ชันจะมีคาบเท่ากับ 2π และสามารถเขียนในเทอมของฟังก์ชันในรูปอนุกรมฟูเรียร์ได้ดังสมการที่ (3.3)

$$a_0 + a_1 \cos x + a_1 \sin x + a_2 \cos 2x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + a_n \sin nx \quad (3.3)$$

เมื่อ $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2$ เป็นค่าคงที่จำนวนจริง จากสมการที่ (3.3) สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3.2

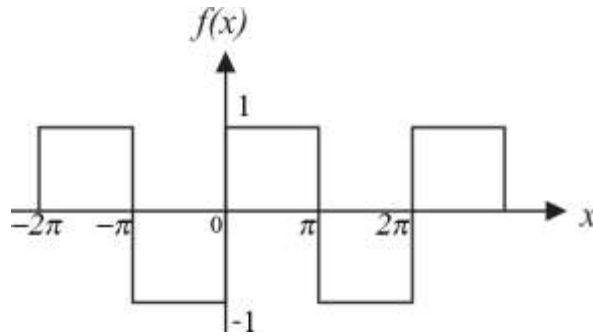


รูปที่ 3.2 (a) สัญญาณฟังก์ชันโคไซน์ ที่ $n = 1, 2$ (b) สัญญาณฟังก์ชันไซน์ $n = 1, 2$

3.3 อนุกรมฟูเรียร์สำหรับฟังก์ชันรายคาบ

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอ อนุกรมฟูเรียร์ในการวิเคราะห์สัญญาณแบบซ้ำคาบ (Fourier series for periodic functions) ที่มีลักษณะของสัญญาณ เป็นสัญญาณทางไฟฟ้าเช่นสัญญาณ แรงดัน กระแส และสัญญาณรูปคลื่นต่างๆ โดยลักษณะของสัญญาณที่พบส่วนใหญ่จะพบในงานวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์

เมื่อกำหนดให้ $f(x)$ เป็นสัญญาณซ้ำคาบใด ๆ ถ้า $f(x+T) = f(x)$ เมื่อ T คือคาบของสัญญาณใดที่เกิดขึ้นซ้ำ ๆ กันตลอดความยาว x เช่น $y = \sin x$ คือสัญญาณที่เกิดขึ้นซ้ำ ใน x กับคาบ 2π ดังนั้นจะได้ $\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi)$ โดยทั่วไปถ้า $y = \sin \omega t$ ดังนั้นคาบของสัญญาณคือ $2\pi/\omega$ สามารถแสดงดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 ฟังก์ชันรายคาบของรูปคลื่นสี่เหลี่ยม (Waveform of Periodic Square Waveform)

ดังนั้นสามารถให้คำจำกัดความของรูปที่ 3.3 ได้ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{when } -\pi < x < \pi \\ -1, & \text{when } \pi < x < 3\pi \end{cases}$$

พื้นฐานของอนุกรมฟูรีเยร์คือทุกฟังก์ชันของสัญญาณสามารถพิจารณาได้ในช่วง $-\pi < x < \pi$ โดยสามารถแสดงในเทอมของอนุกรมตรีโกณมิติที่คอนเวอร์เจนต์ (Convergent trigonometric series) ที่สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (3.4)

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x + \dots + a_n \cos nx + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx \quad (3.4)$$

เรียกสมการที่ (3.5) ว่าสมการอนุกรมฟูรีเยร์

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3.5)$$

จากสมการที่ (3.5) คืออนุกรมฟูรีเยร์ตรีโกณมิติของฟังก์ชัน x ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์ a_0 , a_n และ b_n โดยจะเป็นค่าที่ได้จากการคำนวณแล้วนำไปแทนค่าในสมการที่ (3.5) ในการหาค่าสัมประสิทธิ์ a_0 , a_n และ b_n ดังสมการที่ (3.6) - (3.8)

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &\text{or} \\ a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &\text{or} \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \end{aligned} \right\}, (n=1,2,3\dots) \quad (3.7)$$

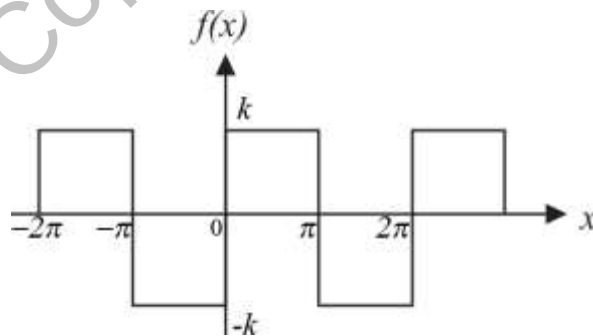
$$\left. \begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &\text{or} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned} \right\}, (n=1,2,3\dots) \quad (3.8)$$

เมื่อ a_0 , a_n และ b_n คือสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์

ตัวอย่างที่ 3.1 จงหาอนุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ แสดงดังรูปที่ 3.4 (Square wave function)

เมื่อกำหนดให้ฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ +k, & 0 < x < \pi \end{cases}$$



รูปที่ 3.4 ฟังก์ชันรายคาบของรูปคลื่นสี่เหลี่ยม $f(x)$

วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1 หาค่าสัมประสิทธิ์ a_0 จากสมการที่ (3.6)

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0 \\
 &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-k) dx + \int_0^{\pi} (k) dx \right\} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left\{ [-kx]_{-\pi}^0 + [-kx]_0^{\pi} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

ขั้นตอนที่ 2 หาค่าสัมประสิทธิ์ a_n จากสมการที่ (3.7)

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-k) \cos nx dx + \int_0^{\pi} (k) \cos nx dx \right\} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{-k \sin nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{k \sin nx}{n} \right]_0^{\pi} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า a_1, a_2, a_3 จะมีค่าเป็นศูนย์

ขั้นตอนที่สอง หาค่าสัมประสิทธิ์ a_n จากสมการที่ (3.7)

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-k) \sin nx dx + \int_0^{\pi} (k) \sin nx dx \right\} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{-k \cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{k \cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \right\}
 \end{aligned}$$

เมื่อแทน n เป็นเลขคี่ จะได้

$$b_n = \frac{k}{\pi} \left\{ \left[\left(\frac{1}{n} \right) - \left(-\frac{1}{n} \right) \right] + \left[-\left(-\frac{1}{n} \right) - \left(-\frac{1}{n} \right) \right] \right\}$$

$$= \frac{k}{\pi} \left\{ \frac{2}{n} + \frac{2}{n} \right\}$$

$$b_n = \frac{4k}{n\pi}$$

เมื่อแทน $n = 3$ จะได้

$$b_3 = \frac{4k}{3\pi}$$

เมื่อแทน $n = 5$ จะได้

$$b_5 = \frac{4k}{5\pi}$$

และค่าอื่นที่เป็นเลขคี่

และเมื่อแทน n เป็นเลขคู่ จะได้

$$b_n = \frac{k}{\pi} \left\{ \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right] + \left[-\frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n} \right) \right] \right\} = 0$$

เมื่อแทนค่า a_0 , a_n และ b_n ในสมการที่ (3.5) จะได้

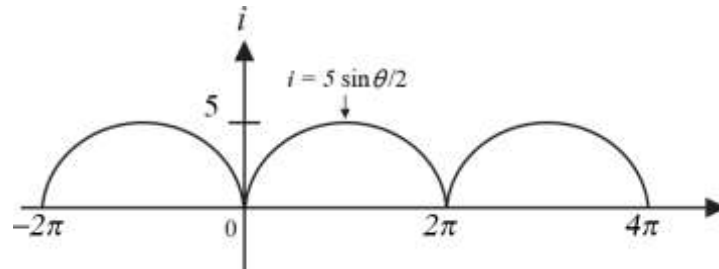
$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \sin x + \frac{4k}{3\pi} \sin 3x + \frac{4k}{5\pi} \sin 5x + \dots$$

หรือ

$$\text{ตอบ } f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

ตัวอย่างที่ 3.2 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันรูปคลื่นเต็มปริดจ์เรียงกระแส $i = 5 \sin \frac{\theta}{2}$ แสดงดังรูป

ที่ 3.5 รูปคลื่นกระแสไฟฟ้าเรียงกระแสแบบเต็มคลื่น (Full wave rectifier function) เมื่อกำหนดให้ฟังก์ชัน



รูปที่ 3.5 รูปคลื่นกระแสไฟฟ้าเรียงกระแสแบบเต็มคลื่น

วิธีทำ

เมื่อ $i = 5 \sin \frac{\theta}{2}$ ที่มีการซ้ำคาบทุก ๆ 2π

ดังนั้นจากสมการที่ (5.3) สามารถเขียนในรูปของสมการอนุกรมฟูเรียร์ใหม่ได้ดังนี้

$$i = i(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

สามารถแทนย่าน 0 ถึง 2π ในช่วงของ $-\pi$ ถึง $+\pi$ เมื่อหาสัมประสิทธิ์ a_0 จะได้

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 5 \sin \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{5}{2\pi} \left[-2 \cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{5}{\pi} \left[\left(-2 \cos \frac{2\pi}{2} \right) - \left(\cos 0 \right) \right]$$

$$= \frac{5}{\pi} [(-1) - (1)]$$

$$a_0 = \frac{10}{\pi}$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ a_n จะได้

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 5 \sin \frac{\theta}{2} \cos n\theta d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left\{ \sin \left(\frac{\theta}{2} + n\theta \right) + \sin \left(\frac{\theta}{2} - n\theta \right) \right\} d\theta \\
 &= \frac{5}{2\pi} \left[\frac{-\cos \left[\left(\frac{1}{2} + n \right) \theta \right]}{\left(\frac{1}{2} + n \right)} - \frac{\cos \left[\left(\frac{1}{2} - n \right) \theta \right]}{\left(\frac{1}{2} - n \right)} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 a_n &= \frac{5}{2\pi} \left\{ \left[\frac{-\cos \left[2\pi \left(\frac{1}{2} + n \right) \right]}{\left(\frac{1}{2} + n \right)} - \frac{\cos \left[2\pi \left(\frac{1}{2} - n \right) \right]}{\left(\frac{1}{2} - n \right)} \right] - \left[\frac{-\cos}{\left(\frac{1}{2} + n \right)} - \frac{\cos}{\left(\frac{1}{2} - n \right)} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

เมื่อแทน n เป็นเลขคู่ และเลขคี่จะได้

ที่ $n = 1$

$$a_1 = \frac{5}{\pi} \left[\frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} \right)} \right] = \frac{5}{\pi} \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{1} \right] = \frac{-20}{3\pi}$$

ที่ $n = 2$

$$a_2 = \frac{5}{\pi} \left[\frac{1}{\frac{5}{2}} + \frac{1}{\left(-\frac{3}{2} \right)} \right] = \frac{5}{\pi} \left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right] = \frac{-20}{(3)(3)\pi}$$

ที่ $n = 3$

$$a_3 = \frac{5}{\pi} \left[\frac{1}{\frac{7}{2}} + \frac{1}{\left(-\frac{5}{2}\right)} \right] = \frac{5}{\pi} \left[\frac{2}{7} - \frac{2}{5} \right] = \frac{-20}{(7)(5)\pi}$$

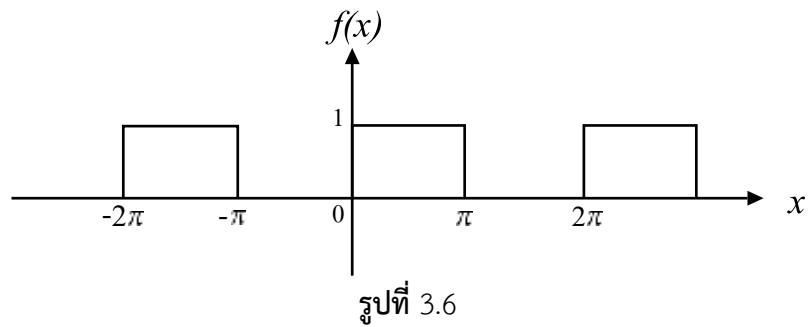
เมื่อหาสัมประสิทธิ์ b_n จะได้

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 5 \sin \frac{\theta}{2} \sin n\theta d\theta \\ &= \frac{5}{\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \left\{ \cos \left[\theta \left(\frac{1}{2} + n \right) \right] - \cos \left[\theta \left(\frac{1}{2} - n \right) \right] \right\} d\theta \\ &= \frac{5}{2\pi} \left[\frac{\sin \left[\theta \left(\frac{1}{2} - n \right) \right]}{\left(\frac{1}{2} - n \right)} - \frac{\sin \left[\theta \left(\frac{1}{2} + n \right) \right]}{\left(\frac{1}{2} + n \right)} \right]_0^{2\pi} \\ b_n &= \frac{5}{2\pi} \left\{ \left[\frac{\sin 2\pi \left(\frac{1}{2} + n \right)}{\left(\frac{1}{2} - n \right)} - \frac{\sin 2\pi \left(\frac{1}{2} - n \right)}{\left(\frac{1}{2} + n \right)} \right] - \left[\frac{\sin 0}{\left(\frac{1}{2} - n \right)} - \frac{\sin 0}{\left(\frac{1}{2} + n \right)} \right] \right\} \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า n เป็นเลขคู่ และเลขคี่จะได้ $b_n = 0$ ดังนั้นเมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ในสมการอนุกรมฟูเรียร์จะได้

$$\begin{aligned} i(\theta) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ i(\theta) &= \frac{10}{\pi} - \frac{20}{3\pi} \cos \theta - \frac{20}{(3)(5)\pi} \cos 3\theta - \frac{20}{(5)(7)\pi} \cos 5\theta - \dots \\ \text{ตอบ } i &= \frac{20}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos \theta}{(3)} - \frac{\cos 3\theta}{(3)(5)} - \frac{\cos 5\theta}{(5)(7)} - \dots \right) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน แสดงดังรูปที่ 3.6 เมื่อกำหนดให้ฟังก์ชัน



วิธีทำ

จากรูปที่ 3.6 คาบเวลาจะอยู่ในช่วง $-\pi$ ถึง π ดังนั้นสามารถเขียนฟังก์ชันได้ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{when } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{when } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

เมื่อหาสัมประสิทธิ์ a_0 จะได้

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} 1 dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 dx \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} [x]_0^{\pi} \\ a_0 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

เมื่อหาสัมประสิทธิ์ a_n จะได้

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} 1 \cos nx dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cos nx dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n\pi} [\sin nx - \sin n0]$$

เมื่อแทน n เป็นเลขคู่ หรือคี่ก็ได้

$$a_n = 0$$

เมื่อหาสัมประสิทธิ์ b_n จะได้

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} 1 \sin nx dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \sin nx dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n} (1 - \cos nx)$$

เมื่อแทน n เป็นเลขคู่จะได้

$$b_n = 0$$

เมื่อแทน n เป็นเลขคี่จะได้

$$b_n = \frac{2}{\pi n}, n = 1, 3, 5, \dots$$

เมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์ a_0 และ b_n ในสมการที่ (3.5) จะได้คำตอบ

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

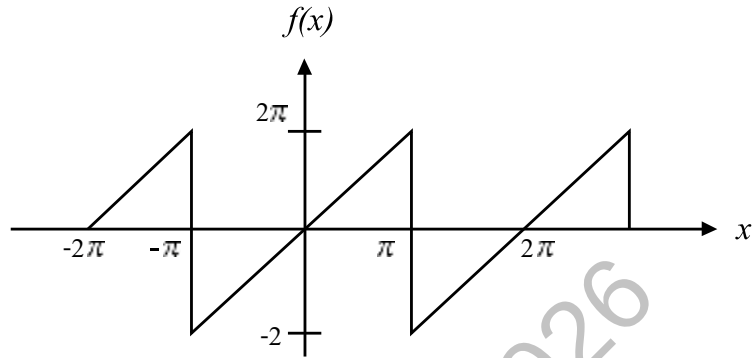
$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin nx)$$

ตอบ $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \dots$

3.4 อนุกรมฟูรีเยร์สำหรับฟังก์ชันไม่ซ้ำคาบ

รายละเอียดในหัวข้อนี้จะนำเสนอการวิเคราะห์อนุกรมฟูรีเยร์สำหรับฟังก์ชันสัญญาณทางไฟฟ้าแบบไม่ซ้ำคาบที่สามารถแสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหาอนุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชันฟันเลื่อยแสดงดังรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7 ฟังก์ชันฟันเลื่อย

วิธีทำ

จากสมการที่ 3.5

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

หาค่า a_0

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x dx$$

$$= \frac{2}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$a_0 = 0$$

หาค่า a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} - \int \frac{x \sin nx}{n} dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \int \frac{\cos nx}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\left(0 + \frac{\cos nx}{n^2} \right) - \left(0 + \frac{\cos n(-\pi)}{n^2} \right) \right]$$

$$a_n = 0$$

หาค่า b_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} - \int \left(\frac{-\cos nx}{n} \right) dx \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{-\pi \cos n\pi}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right) - \left(\frac{-(-\pi) \cos n(-\pi)}{n} + \frac{\sin n(-\pi)}{n^2} \right) \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\pi \cos n\pi}{n} - \frac{\pi \cos(-n\pi)}{n} \right]$$

$$b_n = \frac{-4}{\pi} \cos n\pi$$

เมื่อ แทน n เป็นเลขคี่จะได้

$$n = 1, b_1 = 4$$

$$n = 3, b_3 = -\frac{4}{3}$$

$$n = 5, b_5 = \frac{4}{5}$$

เมื่อ แทน n เป็นเลขคู่จะได้

$$n = 2, b_2 = -\frac{4}{2}$$

$$n = 4, b_4 = -\frac{4}{4}$$

$$n = 6, b_6 = -\frac{4}{6}$$

เมื่อแทนค่า n ในคำตอบจะได้

$$\text{ตอบ } f(x) = 4 \sin x - \frac{4}{2} \sin 2x + \frac{4}{3} \sin 3x + \frac{4}{4} \sin 4x + \frac{4}{5} \sin 5x + \frac{4}{6} \sin 6x + \dots$$

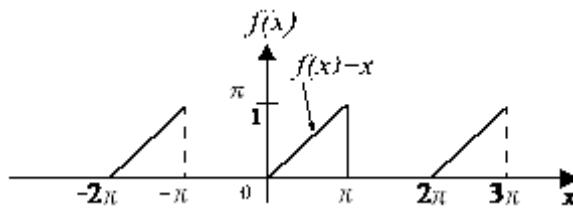
ตัวอย่างที่ 3.5 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันรูปที่ 3.8

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{when } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{when } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

วิธีทำ

จากสมการที่ 3.5

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$



รูปที่ 3.8

หาค่า a_0

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} x dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} \right)$$

$$a_0 = \frac{\pi}{4}$$

หาค่า a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} x \cos nx dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 dx + \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right] - \left[0 + \frac{\cos nx}{n^2} \right] \right\}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1)$$

เมื่อแทนค่า n เป็นเลขคู่จะได้

$$a_n = 0$$

เมื่อแทนค่า $n = 1$ เป็นเลขคี่จะได้

$$a_1 = \frac{-2}{\pi}$$

เมื่อแทนค่า $n = 3$ จะได้

$$a_3 = \frac{-2}{3^2 \pi}$$

เมื่อแทนค่า $n = 5$ จะได้

$$a_5 = \frac{-2}{5^2 \pi}$$

หาค่า b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} x \sin nx dx - \int_{\pi}^{2\pi} 0 dx + \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{-\pi \cos n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi}{n^2} \right] - \left[0 + \frac{\sin 0}{n^2} \right] \right\}$$

$$b_n = \frac{-\cos n\pi}{n}$$

เมื่อแทนค่า n เป็นเลขคี่ และเลขคู่จะได้

เมื่อแทนค่า $n = 1$ จะได้

$$b_1 = -\cos \pi$$

เมื่อแทนค่า $n = 2$ จะได้

$$b_2 = -\frac{1}{2}$$

เมื่อแทนค่า $n = 3$ จะได้

$$b_3 = -\frac{1}{3}$$

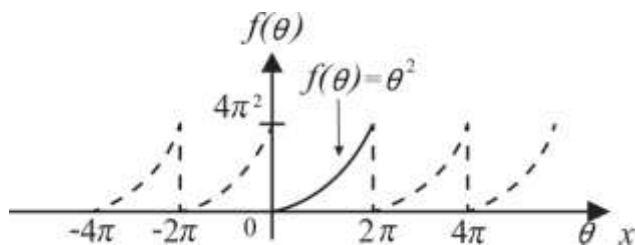
เมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์ในสมการอนุกรมฟูเรียร์จะได้

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos x + \frac{2}{3^2 \pi} \sin 3x + \frac{2}{5^2 \pi} \cos 5x - \dots + \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots$$

หรือ

$$\text{ตอบ } f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} - \dots \right) + \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right)$$

ตัวอย่างที่ 3.6 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9

วิธีทำ

จากสมการอนุกรมฟูเรียร์ที่ 3.5

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

เมื่อหาค่า a_0

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\theta^3}{3} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{8\pi^3}{3} - 0 \right)$$

$$a_0 = \frac{4\pi^2}{3}$$

เมื่อหาค่า a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \theta^2 \cos n\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\theta^2 \sin n\theta}{n} + \frac{2\theta \sin n\theta}{n^3} - \frac{2 \sin n\theta}{n^3} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(0 + \frac{4\pi \cos 2\pi n}{n^2} - 0 \right) - (0) \right]$$

$$= \frac{4}{n^2} \cos 2\pi n$$

เมื่อแทนค่า n เป็นเลขคู่หรือคี่จะได้

$$a_n = \frac{4}{n^2} \text{ เมื่อ } n=1,2,3,\dots$$

หาค่า b_n

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \theta^2 \sin n\theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\theta^2 \cos n\theta}{n} + \frac{2\theta \sin n\theta}{n^2} + \frac{2\theta \sin n\theta}{n^2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{-4\pi^2 \cos \pi n}{n} + 0 + \frac{2 \cos 2\pi n}{n^3} \right) - \left(0 + 0 + \frac{2 \cos 0}{n^3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{-4\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{2}{n^3} \right\} \\ b_n &= \frac{-4\pi}{n} \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า n เป็นเลขคู่หรือคี่ จะได้

$$b_n = \frac{-4\pi}{n} \text{ เมื่อ } n=1,2,3,\dots$$

$$b_1 = \frac{-4\pi}{1}$$

$$b_2 = \frac{-4\pi}{2}$$

$$b_3 = \frac{-4\pi}{3}$$

ตอบ $f(\theta) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos n\theta - \frac{4\pi}{n} \sin n\theta \right)$

หรือ

$$f(\theta) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \left(\cos\theta + \frac{1}{2^2} \cos 2\theta + \frac{1}{3^2} \cos 3\theta + \dots \right) - 4\pi \left(\sin\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta + \dots \right)$$

ตัวอย่างที่ 3.7 จากตัวอย่างที่ 3.6 เมื่อกำหนดให้ $\theta = \pi$ จงหาอนุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชัน $f(\theta)$

วิธีทำ

เมื่อ $\theta = \pi$ ดังนั้น $f(\theta) = \pi^2$

จากสมการคำตอบตัวอย่างที่ 3.6

$$f(\theta) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \left(\cos\theta + \frac{1}{2^2} \cos 2\theta + \frac{1}{3^2} \cos 3\theta + \dots \right) - 4\pi \left(\sin\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta + \dots \right)$$

$$\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \left(\cos\theta + \frac{1}{2^2} \cos 2\theta + \frac{1}{3^2} \cos 3\theta + \dots \right) - 4\pi \left(\sin\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta + \dots \right)$$

เมื่อแทนค่า $\theta = \pi^2$ จะได้

$$\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \left(\cos\pi + \frac{1}{4} \cos 2\pi + \frac{1}{9} \cos 3\pi + \frac{1}{16} \cos 4\pi + \dots \right)$$

$$- 4\pi \left(\sin\pi + \frac{1}{2} \sin 2\pi + \frac{1}{3} \sin 3\pi + \dots \right)$$

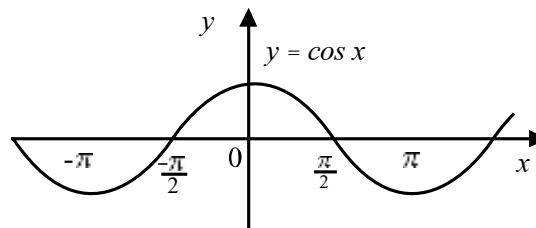
$$\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} = 4 \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \dots \right) - 4\pi(0)$$

$$-\frac{\pi^2}{3} = 4 \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \dots \right)$$

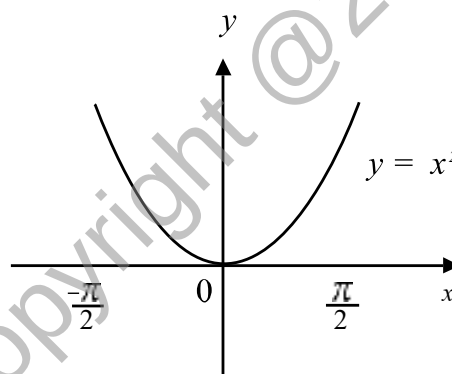
$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \dots$$

3.5 อนุกรมฟูเรียร์สำหรับฟังก์ชันคู่

ฟังก์ชันอนุกรมฟูเรียร์ $f(x)$ ของฟังก์ชันคู่สามารถให้คำนิยามคือ $f(-x) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x โดยกราฟของฟังก์ชันคู่จะเท่ากันเสมอทั้งด้านบนและด้านล่างในแกน y ที่สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3.10 และรูปที่ 3.11 หรืออาจกล่าวได้ว่าฟังก์ชันคู่เมื่อพบสัญญาณที่จุดตัดแกนศูนย์ (ในแนวแกนตั้ง) รูปสัญญาณจะเท่ากัน



รูปที่ 3.10 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ



รูปที่ 3.11 กราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติในหนึ่งคาบเวลา

อนุกรมฟูเรียร์ฟังก์ชันคู่แบบซ้ำคาบ $f(x)$ ที่มีคาบเวลา 2π จะประกอบด้วยเทอมของโคไซน์เพียงอย่างเดียวและอาจจะประกอบด้วยเทอมของค่าคงที่ โดยสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (3.9)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (3.9)$$

เมื่อ

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

หรือ

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \quad (3.10)$$

และสัมประสิทธิ์ a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

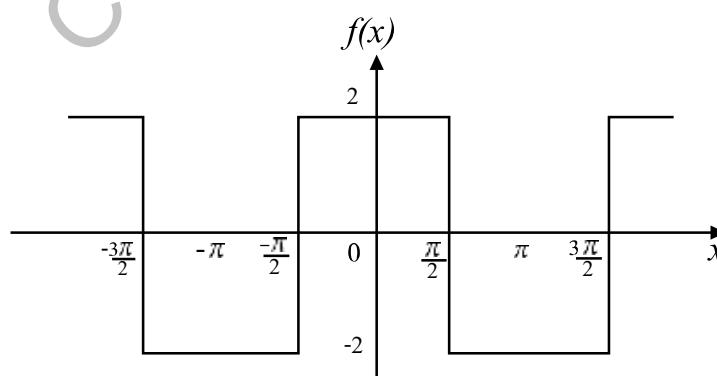
หรือ

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (3.11)$$

ตัวอย่างที่ 3.8 จงหาอนุกรมฟูเรียร์สำหรับฟังก์ชันซ้ำคาบแบบคู่ดังรูปที่ 3.12 เมื่อกำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{when } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 2, & \text{when } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -2, & \text{when } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

เมื่อมีคาบเวลาเท่ากับ 2π



รูปที่ 3.12

วิธีทำ

จากสมการ $f(x)$ ของฟังก์ชันคู่

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

เมื่อหาสัมประสิทธิ์ของ a_0

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} 2 dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -2 dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ [2x]_0^{\pi/2} + [2x]_{\pi/2}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ (\pi) + [-2\pi] - (\pi) \right\} \\ a_0 &= 0 \end{aligned}$$

เมื่อหาสัมประสิทธิ์ของ a_n

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} 2 \cos nx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -2 \cos nx dx \right\} \\ &= \frac{4}{\pi} \left\{ \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{-\sin nx}{n} \right]_{\pi/2}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{4}{\pi} \left\{ \left(\frac{\sin(\pi/2)n}{n} \right) + \left(0 - \frac{-\sin(\pi/2)n}{n} \right) \right\} \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{2 \sin(\pi/2)n}{n} \right) \\ a_n &= \frac{8}{\pi n} \left(\sin \frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

เมื่อ n เป็นเลขคู่

$$a_n = 0$$

เมื่อ n เป็นเลขคี่

$$a_n = \frac{8}{\pi n} \quad \text{for } n=1,5,9\ldots$$

และ

$$a_n = \frac{-8}{\pi n} \quad \text{for } n=3,7,11\ldots$$

เมื่อ

$$a_1 = \frac{8}{\pi}, a_3 = \frac{-8}{3\pi}, a_5 = \frac{-8}{5\pi} \ldots$$

ดังนั้นสามารถเขียนคำตอบได้

ตอบ

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x + \ldots \right)$$

ตัวอย่างที่ 3.9 จากตัวอย่างที่ 3.8 เมื่อกำหนดให้ $x = 0$ จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันคู่
วิธีทำ

เมื่อ $x = 0, f(x) = 2$

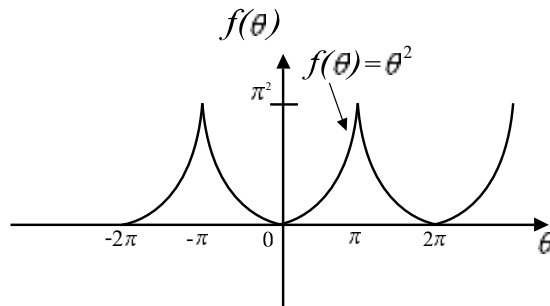
จากคำตอบ
$$f(x) = \frac{8}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x + \ldots \right)$$

$$2 = \frac{8}{\pi} \left(\cos 0 - \frac{1}{3} \cos 0 + \frac{1}{5} \cos 0 - \frac{1}{7} \cos 0 + \ldots \right)$$

$$\frac{2\pi}{8} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cos 0 + \ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

ตัวอย่างที่ 3.10 จงหาอนุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชัน $f(\theta) = \theta^2$ และคาบเวลาที่อยู่ในช่วง $-\pi < \theta < \pi$ และ คาบเวลาของสัญญาณเท่ากับ $2/\pi$ และรูปของสัญญาณแสดงดังรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13

วิธีทำ

จากสมการ $f(x)$ ของฟังก์ชันคู่

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

เมื่อหาสัมประสิทธิ์ของ a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) d\theta$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f \theta^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\theta^3}{3} \right]_0^{\pi}$$

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}$$

เมื่อหาสัมประสิทธิ์ของ a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\theta^2 \sin \theta}{n} + \frac{2\theta \cos n\theta}{n^2} - \frac{2 \sin \theta}{n^3} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\left(0 + \frac{2\pi \cos n\pi}{n^2} - 0 \right) - (0) \right]
\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{4}{n^2} \cos n\pi$$

เมื่อแทนค่า n เป็นเลขคู่จะได้

เมื่อ $n=1$

$$a_1 = \frac{-4}{1}$$

เมื่อ $n=3$

$$a_3 = \frac{-4}{3^2}$$

เมื่อ $n=5$

$$a_5 = \frac{-4}{5^2}$$

เมื่อแทนค่า n เป็นเลขคู่จะได้

เมื่อ $n=4$

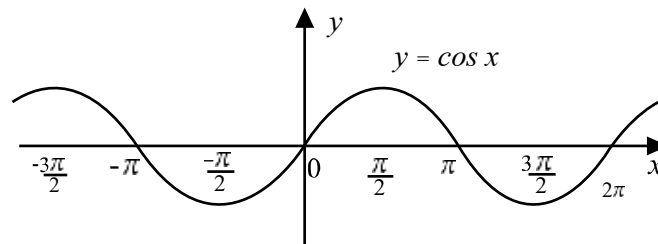
$$a_4 = \frac{4}{4^2}$$

เมื่อเขียนคำตอบของสมการอนุกรมฟูเรียร์จะได้

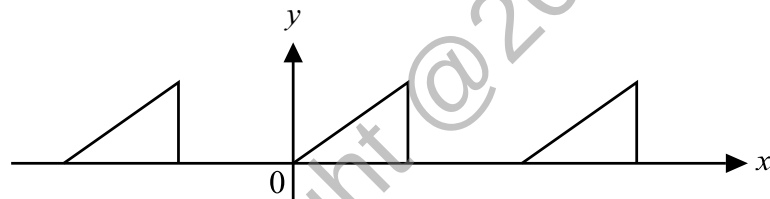
$$\text{ตอบ } f(\theta) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos \theta - \frac{1}{2^2} \cos 2\theta + \frac{1}{3^2} \cos 3\theta - \frac{1}{4^2} \cos 4\theta + \frac{1}{5^2} \cos 5\theta \dots \right)$$

3.6 อนุกรมฟูเรียร์สำหรับฟังก์ชันคี่

ฟังก์ชันอนุกรมฟูเรียร์ $f(x)$ ของฟังก์ชันคี่สามารถให้คำนิยามคือ $f(-x) = -f(x)$ โดย ฟังก์ชันคี่ของสัญญาณที่ซ้ำคาบเมื่อพับสัญญาณที่จุดตัดแกนศูนย์ (ในแนวแกนตั้ง) รูปสัญญาณจะไม่เท่ากัน และสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3.14 และรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.14



รูปที่ 3.15

กรณีอนุกรมฟูเรียร์ที่เป็นฟังก์ชันคี่สามารถเขียนสมการได้ดังสมการที่ (3.12) โดยจะมีเฉพาะเทอมสัมประสิทธิ์ค่า b_n

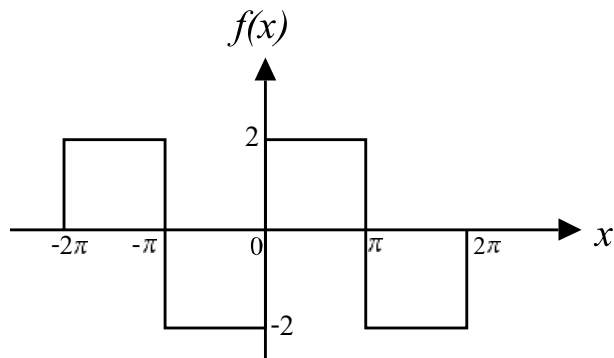
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx \quad (3.12)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$$

หรือ

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx \quad (3.13)$$

ตัวอย่างที่ 3.11 จงหาอนุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชัน ดังรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.16

วิธีทำ

จากสมการที่ (3.12) เมื่ออนุกรมฟูรีเยร์เป็นแบบฟังก์ชันคู่และสามารถเขียนเงื่อนไขของสัญญาณได้

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{when } -\pi < x < 0 \\ 2, & \text{when } 0 < x < \pi \end{cases}$$

หาค่าสัมประสิทธิ์จากสมการที่ (3.13)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2 \sin nx dx \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{-\cos nx}{n} \right]_0^\pi \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\left(\frac{-\cos n\pi}{n} \right) - \left(\frac{1}{n} \right) \right] \\ b_n &= \frac{4}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า n เป็นเลขคู่จะได้

$$b_n = 0$$

เมื่อแทนค่า n เป็นเลขคี่จะได้

$$b_n = \frac{4}{n\pi} (1 - (-1))$$

$$b_n = \frac{8}{n\pi}$$

เมื่อแทนค่า $n = 1$ จะได้

$$b_1 = \frac{8}{\pi}$$

เมื่อแทนค่า $n = 3$ จะได้

$$b_3 = \frac{8}{3\pi}$$

เมื่อแทนค่า $n = 5$ จะได้

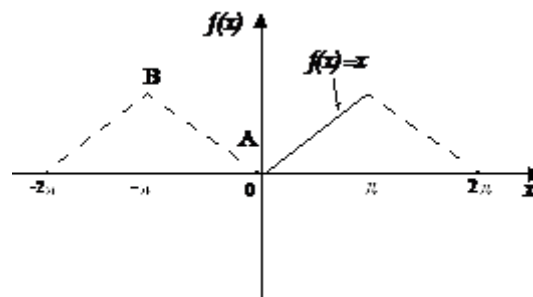
$$b_5 = \frac{8}{5\pi}$$

ดังนั้นสามารถเขียนคำตอบของสมการอนุกรมฟูรีเยร์แบบฟังก์ชันคี่จะได้

ตอบ
$$f(x) = \frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right)$$

3.7 อนุกรมฟูรีเยร์สำหรับฟังก์ชันครึ่งคลื่น

เมื่อฟังก์ชันถูกกำหนดย่านจาก 0 ถึง π และสามารถแทนได้ในช่วง 0 ถึง 2π กรณีที่ 1 ฟังก์ชันในรูปของโคไซน์ เมื่อ $f(x) = x$ แสดงได้ดังรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17

สมการกรณีนุกรมฟูรีเยร์แบบสัญญาณซ้ำคาบแบบครึ่งคลื่น

$$f(x) = a_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (3.14)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \quad (3.15)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (3.16)$$

ตัวอย่างที่ 3.12 จงหาค่านุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชัน $f(x) = 3x$ เมื่อช่วงของสัญญาณ $0 < x \leq \pi$ ดังรูปที่ 3.17

วิธีทำ

จากสมการ (3.14)

$$f(x) = a_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

หาค่าสัมประสิทธิ์ a_0 จากสมการ (3.15)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 3x dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi}$$

$$a_0 = \frac{3\pi}{2}$$

หาค่าสัมประสิทธิ์ a_n จากสมการ (3.16)

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^\pi \\
&= \frac{6}{\pi} \left[\left(\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right) - \left(0 + \frac{\cos n0}{n^2} \right) \right] \\
&= \frac{6}{\pi} \left(0 + \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{\cos n0}{n^2} \right) \\
a_n &= \frac{6}{n\pi^2} (\cos n\pi - 1)
\end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า n เป็นเลขคู่จะได้

$$a_n = 0$$

เมื่อแทนค่า n เป็นเลขคี่จะได้

$$a_n = \frac{6}{\pi n^2} (-1 - 1) = \frac{-12}{\pi n^2}$$

เมื่อแทนค่า $n = 1$ จะได้

$$a_1 = \frac{-12}{\pi}$$

เมื่อแทนค่า $n = 3$ จะได้

$$a_3 = \frac{-12}{\pi 3^2}$$

เมื่อแทนค่า $n = 5$ จะได้

$$a_5 = \frac{-12}{\pi 5^2}$$

ตอบ
$$f(x) = 3x = \frac{3\pi}{2} - \frac{12}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right)$$

กรณีที่ 2 ฟังก์ชันในรูปของไซน์ เมื่อ $f(x) = x$

3.8 การประยุกต์ใช้ออนุกรมฟูเรียร์ในวงจรไฟฟ้า

การประยุกต์ใช้ออนุกรมฟูเรียร์ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า บางครั้งแหล่งจ่ายแรงดันของวงจรไฟฟ้า อาจไม่เป็นไซน์ (Non-sinusoidal function) แต่ฟังก์ชันที่จะวิเคราะห์จะต้องเป็นสัญญาณแบบซ้ำคาบ (Periodic function) โดยสามารถพิจารณากระบวนการในการหาค่าได้สี่ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 แสดงสมการในรูปของออนุกรมฟูเรียร์

ขั้นตอนที่ 2 แปลงวงจรในรูปของเวลาไปสู่วงจรในรูปของความถี่

ขั้นตอนที่ 3 หาผลตอบสนองอันดับหนึ่งของ องค์ประกอบออนุกรมฟูเรียร์ในรูปของไฟฟ้า กระแสตรง และกระแสสลับ

ขั้นตอนที่ 4 รวมองค์ประกอบออนุกรมฟูเรียร์ในรูปของไฟฟ้ากระแสตรงและกระแสสลับ ดังนั้นสามารถแสดงแรงดันในรูปของสัญญาณที่ไม่เป็นไซน์และซ้ำคาบ ดังสมการที่ (3.17) เมื่อเริ่มต้นคำนวณให้พิจารณาวงจรพื้นฐานในรูปที่ 3.18 (a) ที่ประกอบด้วยวงจรเชิงเส้น และแหล่งจ่ายแรงดันแบบซ้ำคาบ

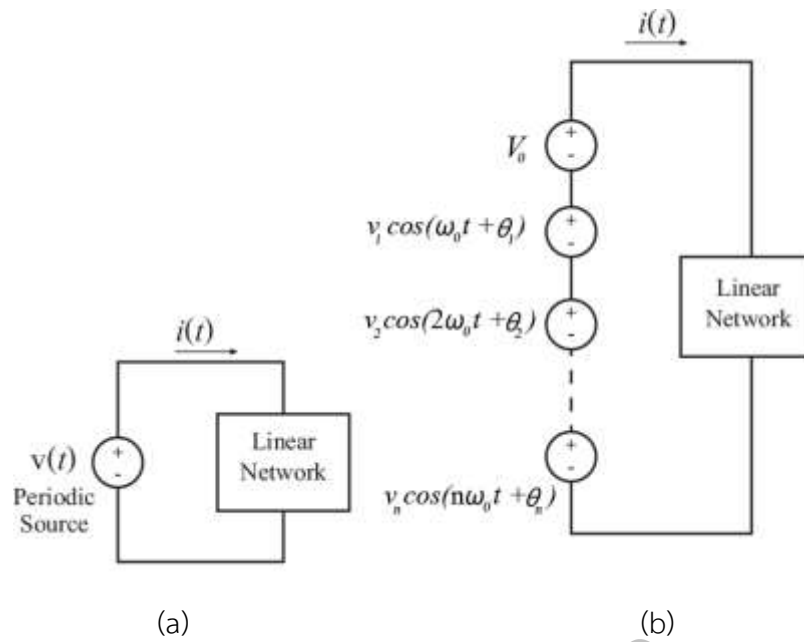
$$v(t) = V_0 \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (3.17)$$

จากรูปที่ 3.18 (b) เมื่อแรงดัน $v(t)$ ประกอบด้วยสองส่วนคือองค์ประกอบแรงดันกระแสตรง V_0

และองค์ประกอบของแรงดันกระแสสลับที่ลำดับฮาร์โมนิกต่าง $\vec{V}_n = V_n \angle \theta_n$ และสามารถเขียนสมการของกระแสได้ดังสมการที่ (3.18)

$$i(i) = i_0(t) + i_1(t) + i_2(t) + \dots$$

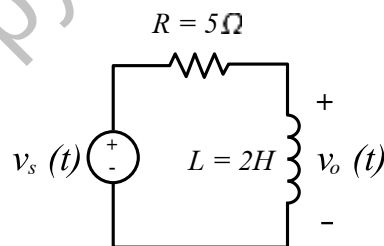
$$= i_0 \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \cos(n\omega_0 t + \psi_n) \quad (3.18)$$



รูปที่ 3.18 (a) วงจรลิเนียร์กับแหล่งจ่ายซ้ำคาบ (b) วงจรอนุกรมฟูเรียร์แสดงในรูปของเวลา

ตัวอย่างที่ 3.13 จงหาค่าอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $V_0(t)$ เมื่อกำหนดให้

$$v_s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi t, \quad n = 2k - 1 \quad \text{ดังรูปที่ 3.19}$$



รูปที่ 3.19 วงจรอนุกรม RL สำหรับตัวอย่างที่ 3.13

วิธีทำ

$$\text{จาก } v_s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi t, \quad n = 2k - 1$$

$$\text{เมื่อความถี่ } \omega_n = n\omega_0 = n\pi \text{ rad/s}$$

$$V_0 = \frac{j\omega_n L}{R + j\omega_n L} V_s$$

$$= \frac{j2n\pi}{5 + j2n\pi} V_s$$

เมื่อองค์ประกอบของกระแสตรง ($\omega_n = 0$ or $n = 0$)

$$V_s = \frac{1}{2} \Rightarrow V_0 = 0$$

เมื่อตัวเหนี่ยวนำลัดวงจร

$$V_s = \frac{2}{n\pi} \angle -90^\circ$$

และเมื่อแทนค่า V_s เพื่อหาผลตอบสนองของ V_0 จะได้

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{2n\pi \angle -90^\circ}{\sqrt{25 + 4n^2\pi^2} \angle \tan^{-1} 2n\pi/5} \left(\frac{2}{n\pi} \angle -90^\circ \right) \\ &= \frac{4 \angle \tan^{-1} 2n\pi/5}{\sqrt{25 + 4n^2\pi^2}} \end{aligned}$$

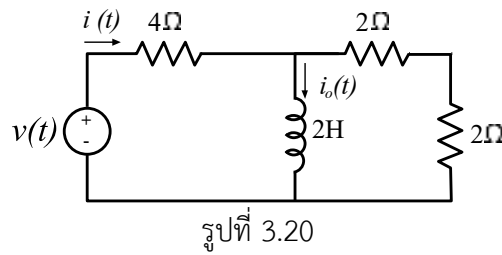
และเมื่อแปลงค่า V_0 ให้อยู่ในรูปของเวลา จะได้

$$V_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{25 + 4n^2\pi^2}} \cos\left(n\pi t - \tan^{-1} \frac{2n\pi}{5}\right), \quad n = 2k-1$$

เมื่อแทนค่าลำดับฮาร์โมนิกส์ 3 ค่า จะได้ ($k = 1, 2, 3$ or $n = 1, 3, 5$) ของฮาร์โมนิกส์ลำดับคี่จะได้

$$\begin{aligned} V_0(t) &= 0.4981 \cos(\pi t - 51.49^\circ) + 0.2051 \cos(3\pi t - 75.14^\circ) \\ &\quad + 0.1257 \cos(5\pi t - 80.96^\circ) + \dots V \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.14 จงหาผลตอบสนองของกระแส $i_o(t)$ ของวงจรในรูปที่ 3.20



เมื่อกำหนดให้แรงดันด้านเข้าของวงจรมีค่าเท่ากับ $V_0(t) = 1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1+n^2} (\cos nt \mp n \sin nt)$

วิธีทำ

$$\text{จากสมการ } A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = -\tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right)$$

ดังนั้นสามารถเขียนสมการแรงดัน $v(t)$ ได้ใหม่

$$\begin{aligned} V(t) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}} \cos \left(nt - \tan^{-1} n \right) \\ &= 1 - 1.414 \cos \left(t - 45^\circ \right) + 0.8944 \cos \left(2t - 63.45^\circ \right) \\ &\quad - 0.6345 \cos \left(3t + 71.56^\circ \right) - 0.4851 \cos \left(4t - 78.7^\circ \right) + \dots \end{aligned}$$

เมื่อกำหนดให้ $\omega_0 = 1$, ω_n rad/s ดังนั้นสามารถหาค่าอิมพีแดนซ์ของวงจรได้ดังนี้

$$\begin{aligned} Z &= 4 + j\omega_n (2//4) \\ &= 4 + \frac{j\omega_n 8}{4 + j\omega_n 2} \\ &= \frac{8 + j\omega_n 8}{2 + j\omega_n} \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้กระแสอินพุท

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{8 + j\omega_n 8}{2 + j\omega_n} V$$

เมื่อ V คือเฟสเซอร์ของแหล่งจ่ายแรงดัน

เมื่อใช้กฎการแบ่งกระแส

$$I_0 = \frac{4}{4 + j\omega_n 2} I$$

$$= \frac{V}{4 + j\omega_n 4}$$

เมื่อ $\omega_n = n$ ดังนั้นสามารถหา I_0 ได้ดังนี้

$$I_0 = \frac{V}{4 \sqrt{1+n^2} \angle \tan^{-1} n}$$

สำหรับองค์ประกอบแรงดันกระแสตรงเมื่อ $\omega_0 = 0$ หรือ $n = 0$

$$V = 1 \Rightarrow I_0 = \frac{V}{4} = \frac{1}{4}$$

สำหรับลำดับฮาร์โมนิกสัใดๆ

$$V = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}} \angle \tan^{-1} n$$

ดังนั้น

$$I_0 = \frac{V}{4 \sqrt{1+n^2} \angle \tan^{-1} n} \frac{2(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}} \angle \tan^{-1} n$$

$$= \frac{(-1)^n}{2(1+n^2)}$$

เมื่อเขียนคำตอบในรูปแบบของโดเมนเวลาจะได้

$$i_0(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(1+n^2)} \cos nt$$

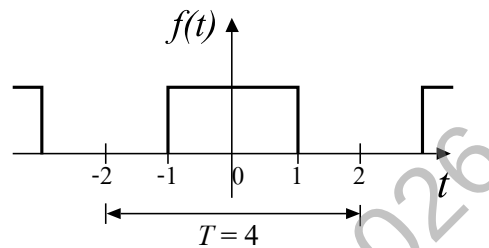
แบบฝึกหัดบทที่ 3

3.1 จงหาค่าอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันซ้ำคาบจากสมการ

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{when } -\pi < x < 0 \\ +2, & \text{when } 0 < x < \pi \end{cases}$$

เมื่อมีคาบเท่ากับ 2π

3.2 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของรูปคลื่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังรูปที่ 3A



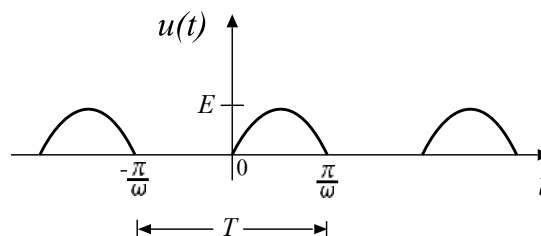
รูปที่ 3A

เมื่อกำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < t < -1 \\ k, & -1 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$

3.3 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของรูปคลื่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังรูปที่ 3B เมื่อกำหนดให้

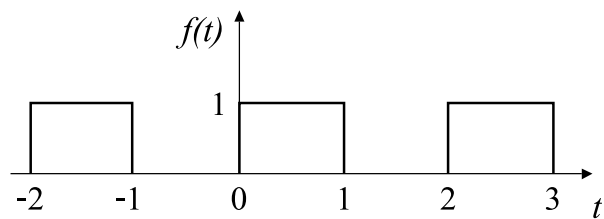
$$u(t) = \begin{cases} 0, & -\pi/2 < t < 0 \\ E \sin \omega t, & 0 < t < T/2 \end{cases}$$

เมื่อ $T = \frac{2\pi}{\omega}$



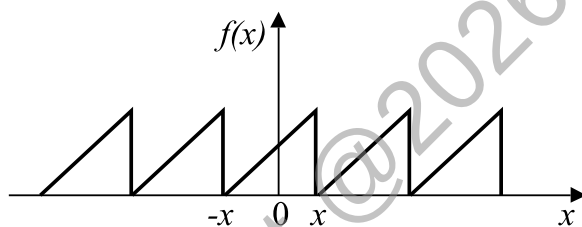
รูปที่ 3B

3.4 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน ดังรูปที่ 3C



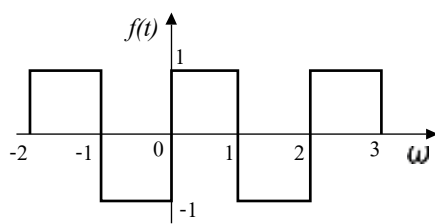
รูปที่ 3C

3.5 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน ดังรูป 3D เมื่อ $f(x) = x + \pi$ ถ้า $-\pi < x < \pi$



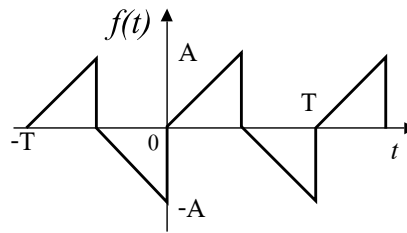
รูปที่ 3D

3.6 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันสี่เหลี่ยมที่แสดง ดังรูปที่.3E



รูปที่ 3E

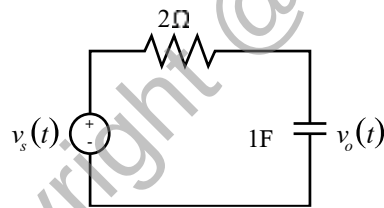
3.7 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันดังรูปที่ 3F เมื่อ $A = 5$ และ $T = 2\pi$



รูปที่ 3F

3.8 ถ้ากำหนดฟังก์ชันพหุนามมีค่าแรงดันที่แหล่งจ่าย $V_s(t) = 3 - \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2\pi n t$

จงหาแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ $V_o(t)$ ดังรูปที่ 3G



รูปที่ 3G

เอกสารอ้างอิง

1. Bracewell, R. N. (2000). *The Fourier transform and its applications* (3rd ed.). McGraw-Hill.
2. Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1996). *Signals and systems* (2nd ed.). Pearson.
3. Papoulis, A. (2018). *The Fourier integral and its applications*. Dover Publications.
4. Proakis, J. G., & Manolakis, D. G. (2014). *Digital signal processing: Principles, algorithms, and applications* (4th ed.). Pearson.
5. Strang, G. (1993). *Wavelets and filter banks*. Wellesley-Cambridge Press.
6. Smith, S. W. (2003). *The scientist and engineer's guide to digital signal processing* (2nd ed.). California Technical Publishing.
7. Mallat, S. (2008). *A wavelet tour of signal processing: The sparse way* (3rd ed.). Academic Press.
8. Poularikas, A. D. (2010). *Transforms and applications handbook* (3rd ed.). CRC Press.
9. Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2011). *Fourier analysis: An introduction*. Princeton University Press.
10. Zayed, A. I. (1996). *Handbook of function and generalized function transformations*. CRC Press.
11. Roberts, M. J. (2004). *Signals and systems: Analysis using transform methods and MATLAB*. McGraw-Hill.
12. Folland, G. B. (1992). *Fourier analysis and its applications*. Wadsworth & Brooks/Cole.
13. Brigham, E. O. (1988). *The fast Fourier transform and its applications*. Prentice-Hall.
14. Kammler, D. W. (2008). *A first course in Fourier analysis*. Cambridge University Press.
15. Vetterli, M., Kovacevic, J., & Goyal, V. K. (2014). *Foundations of signal processing*. Cambridge University Press.

บทที่ 4

การแปลงฟูเรียร์

4.1 บทนำ

อนุกรมฟูเรียร์ที่นำเสนอในฟังก์ชันสัญญาณที่ซ้ำคาบคือผลรวมของสัญญาณไซน์ที่สเปกตรัมความถี่ต่าง ๆ การแปลงอนุกรมฟูเรียร์นอกจากจะแปลงฟังก์ชันที่ซ้ำคาบได้อีกทั้งยังสามารถแปลงฟังก์ชันที่ไม่ซ้ำคาบได้เหมือนกัน ดังนั้นคำนิยามของการแปลงฟูเรียร์คือ การอินทิเกรตของฟังก์ชันที่ไม่ซ้ำคาบของฟังก์ชันอนุกรมฟูเรียร์

4.2 นิยามการแปลงฟูเรียร์

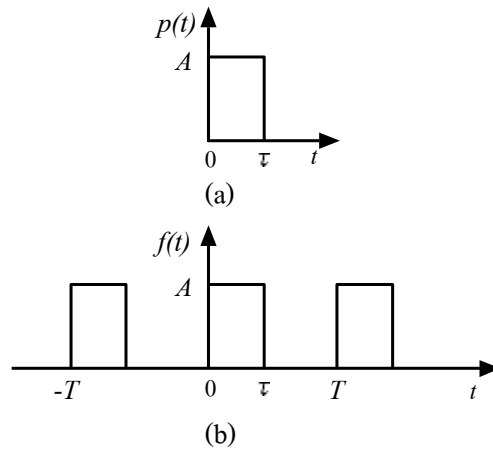
นิยามโดยปกติแล้ว "การแปลงฟูเรียร์" หมายถึงการแปลงฟูเรียร์ต่อเนื่อง ซึ่งเป็นการเขียนแทนด้วย ฟังก์ชัน $f(t)$ ที่สามารถหาอนุพันธ์ของกำลังสองได้ด้วยผลบวกของ ฟังก์ชันเอกซโพเนนเชียลเชิงซ้อน ซึ่งมีความถี่เชิงมุม ω และ ขนาดหรือแอมพลิจูด (Amplitude) เป็นจำนวนเชิงซ้อน $F(\omega)$

ความสัมพันธ์การแปลงกลับฟูเรียร์แบบต่อเนื่อง (Inverse Fourier transform) ส่วนการแปลงฟูเรียร์นั้นปกติจะเขียน $F(\omega)$ ในรูปของ $f(t)$ คู่ของฟังก์ชันดั้งเดิม และผลของการแปลงของฟังก์ชันนั้นบางครั้งก็เรียก คู่ของการแปลง (Transform pair) ดูข้อมูลเพิ่มเติมที่ การแปลงฟูเรียร์ต่อเนื่อง ภาคขยายของการแปลงนี้คือ การแปลงฟูเรียร์แบบไม่เป็นจำนวนเต็ม (Fractional Fourier transform) ซึ่งคล้ายกำลังของการแปลงหรือจำนวนการแปลงซ้ำ นั้นไม่จำเป็นจะต้องเป็นจำนวนเต็มสามารถเป็นค่าจำนวนจริงใด ๆ

เมื่อ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ (ฟังก์ชันคี่) เทอม ไซน์ (โคไซน์) จะไม่ปรากฏซึ่งคงเหลือไว้แต่ การแปลงโคไซน์ และการแปลงไซน์ตามลำดับ อีกกรณีหนึ่งคือ เมื่อ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง จะทำให้และสามารถแสดงสมการของการแปลงฟูเรียร์ได้ดังสมการที่ (4.1) และ (4.2) ตามลำดับ

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (4.1)$$

$$F(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) c_n e^{jn\omega_0 t} dt \quad (4.2)$$



รูปที่ 4.1 (a) แสดงฟังก์ชันไม่ซ้ำคาบ (b) แสดงฟังก์ชัน $f(t)$ ของฟังก์ชันในรูป (a)

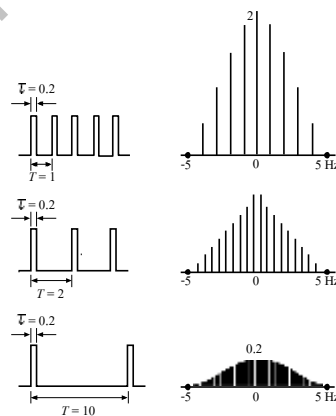
เมื่อความถี่มูลฐานสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (4.3)

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (4.3)$$

ช่วงของสัญญาณฮาร์มอนิกส์แสดงดังสมการที่ (4.4)

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - \omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (4.4)$$

พิจารณาในรูปที่ 4.2 แสดงผลของการเพิ่มขึ้นของคาบเวลา T บนขนาดสเปกตรัมต่าง ๆ



รูปที่ 4.2 แสดงผลการเพิ่มขึ้นของคาบเวลาของสัญญาณพลัส

เมื่อแทนค่าสมการที่ (4.2) ลงในสมการที่ (4.1) และจะได้สมการที่ (4.5)

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt \right] \Delta\omega e^{jn\omega_0 t}
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

ถ้าให้ $T \rightarrow \infty$ ผลรวม จะกลายเป็นการอินทิเกรตและการเพิ่มขึ้นของ $\Delta(\omega)$ จะเป็นการแยกดิฟเฟอเรนเชียล $d\omega$ และสัญญาณค่าฮาร์โมนิกส์ไม่ต่อเนื่อง (Discrete) $n\omega$ จะกลายเป็นความถี่ต่อเนื่อง ω ดังนั้นจะ เป็น $T \rightarrow \infty$ ที่สามารถแสดงได้ในสมการที่ (4.6)

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \\
 \Delta\omega &\Rightarrow d\omega \\
 n\omega_0 &\Rightarrow \omega
 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

และเมื่อแทนค่าสมการ (4.6) จะกลายเป็นสมการที่ (4.7)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} d\omega \quad (4.7)$$

เทอมของการแปลงฟูเรียร์ $f(t)$ สามารถเขียนแทนด้วย $F(\omega)$ ดังแสดงสมการการแปลงฟูเรียร์ ในสมการที่ (4.8)

เมื่อ $\mathcal{F}$ คือ ตัวดำเนินการในการแปลงฟูเรียร์

$$F(\omega) = \mathcal{F} \delta(t - t_0) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.8)$$

จากสมการ (4.7) สามารถเขียนใหม่ได้

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.9)$$

หรือการแปลงฟูเรียร์ฟังก์ชันสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (4.10)

$$f(t) = F(\omega) \quad (4.10)$$

ตัวอย่างที่ 4.1 จงแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $\delta(t-t_0)$

วิธีทำ สำหรับสมการอิมพลัส

$$F(\omega) = \mathcal{F} \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \quad (\text{A4.1})$$

และเป็นคุณสมบัติการเลื่อนของอิมพลัสฟังก์ชันในกรณีที่ $t_0 = 0$ ดังนั้นจะได้

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \quad (\text{A4.2})$$

และสามารถหาการแปลงฟูเรียร์ได้สองแบบ

$$F(\omega) = (\omega - \omega_0)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} (\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t}$$

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (\text{4A.3})$$

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[1]$$

เมื่อใช้การแปลงกลับฟูเรียร์ในสมการที่ (4.9)

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{j\omega t} d\omega$$

หรือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{j\omega t} d\omega = 2\pi \delta(t) \quad (\text{4A.4})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{j\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega) \quad (\text{4A.5})$$

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{j\omega t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi (\omega_0 - \omega)$$

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (4A.6)$$

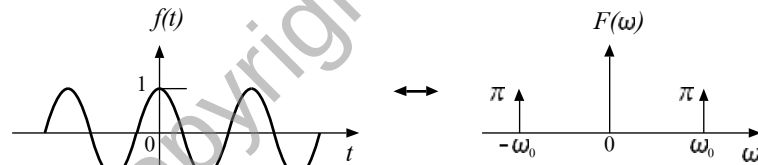
$$\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (4A.7)$$

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega) \quad (4A.8)$$

โดยใช้ผลของสมการที่ (4A.6) และ (4A.7) จะได้

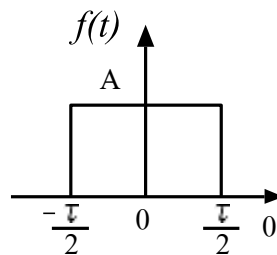
$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}[\cos \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}] \\ &= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณโคไซน์แสดงดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 การแปลงฟูเรียร์

ตัวอย่างที่ 4.2 จงแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณสี่เหลี่ยมที่มีความกว้างของพัลส์ τ และความสูง A แสดงในรูปที่ 4.4



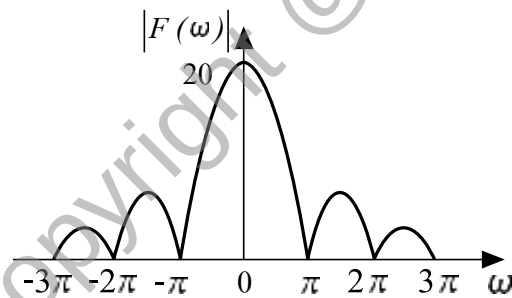
รูปที่ 4.4 สัญญาณสี่เหลี่ยมสำหรับตัวอย่างที่ 4.2

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &= \frac{2A}{\omega} \left(\frac{e^{j\omega t/2} - e^{-j\omega t/2}}{2j} \right) \\
 &= A \frac{\sin \omega \pi / 2}{\omega \pi / 2} \\
 &= A \pi \operatorname{sinc} \frac{\omega \pi}{2}
 \end{aligned}$$

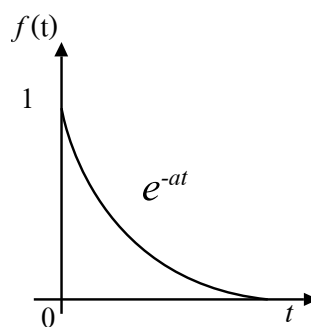
$$F(\omega) = 20 \operatorname{sinc} \omega$$

และสามารถแสดงสเปกตรัมของฟังก์ชัน $F(\omega)$ ดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 สเปกตรัมของสัญญาณสี่เหลี่ยมสำหรับตัวอย่างที่ 4.2

ตัวอย่างที่ 4.3 จงแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลดังรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6

วิธีทำ จากรูปที่ 4.6

$$f_1(t) = e^{-at} u(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{-1}{a + j\omega} e^{-(a + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a + j\omega} \end{aligned}$$

4.3 คุณสมบัติของการแปลงฟูเรียร์

เราสามารถหาประโยชน์จากการแปลงฟูเรียร์ในการเปลี่ยนรูปของฟังก์ชันสำหรับ ฟังก์ชันพื้นฐาน และแต่ละคุณสมบัติสามารถแสดงดังหัวข้อต่อไปนี้

4.3.1 คุณสมบัติเชิงเส้น

ถ้า $F_1(\omega)$ และ $F_2(\omega)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ ดังนั้นสามารถแสดง ได้ดังสมการที่ (4.12)

$$\mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) \quad (4.12)$$

โดยนิยามได้ดังสมการที่ (4.13)

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}\left[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a_1 f_1(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} a_2 f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

สำหรับกรณีตัวอย่าง $\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$ โดยใช้คุณสมบัติเชิงเส้นจะได้สมการที่ (4.14)

$$\begin{aligned} F[\sin \omega_0 t] &= \frac{1}{2j} [\mathcal{F}(e^{j\omega_0 t}) - \mathcal{F}(e^{-j\omega_0 t})] \\ &= \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= j\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.3.2 คุณสมบัติการแบ่งเวลา

ถ้ากำหนดให้ $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ ดังนั้นแสดงได้ดังสมการที่ (4.15)

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (4.15)$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบ $|a| < 1$ สามารถแสดงความถี่ของการแบ่งเวลาได้ดังนี้

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt \quad (4.16)$$

ถ้ากำหนดให้ $x = at$ ดังนั้น $dx = a dt$ และจะได้

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x/a} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (4.17)$$

กรณีศึกษาเมื่อสัญญาณสี่เหลี่ยม $p(t)$ ในตัวอย่างที่ 4.2

$$\mathcal{F}[p(t)] = A_r \sin c \frac{\omega\tau}{2} \quad (4.18a)$$

และเมื่อใช้สมการที่ (4.15)

$$\mathcal{F}[p(2t)] = A_r \sin c \frac{\omega\tau}{2} \quad (4.18b)$$

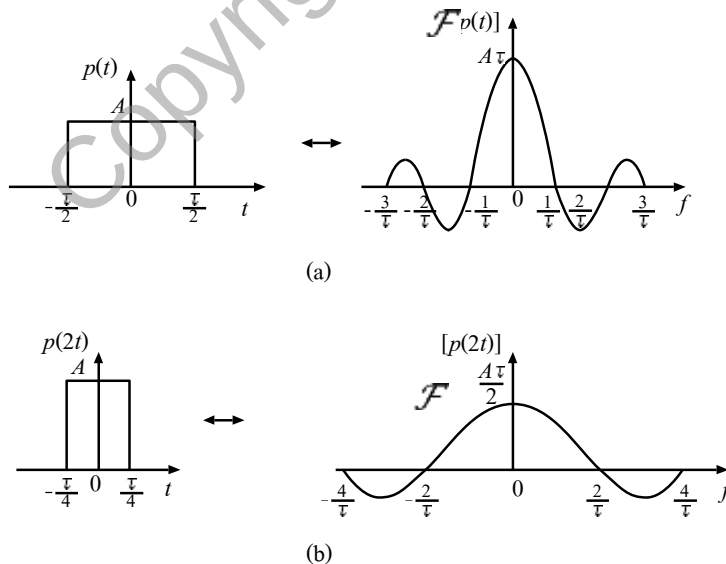
และจะเป็นประโยชน์มากในการวาด $p(t)$ ดังรูปที่ 4.7 (a) และ $p(2t)$ ซึ่งการแปลงฟูเรียร์ เมื่อ

$$p(t) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.19a)$$

เมื่อแทนค่า $t = 2t$ จะได้

$$p(2t) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} < 2t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{4} < t < \frac{\tau}{4} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.19b)$$

ดังนั้น $p(2t)$ สามารถแสดงการแปลงฟูเรียร์ได้ดังรูปที่ 4.7 (b)



รูปที่ 4.7 ผลของการเลื่อนสเกลเวลา (a) การแปลงสัญญาณพลัส

(b) สัญญาณเมื่อแสดงในรูปของความถี่

4.3.3 คุณสมบัติของการเลื่อนของเวลา

ถ้า $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ ดังนั้นสามารถแสดงได้ในสมการที่ (4.20)

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(\omega) \quad (4.20)$$

คือการหวนเวลาในรูปของโดเมนเวลาที่จะเกี่ยวข้องกับการเลื่อนเฟสในโดเมนความถี่ เพื่อที่จะหาคุณสมบัติของการเลื่อน จึงกำหนดให้ดังสมการที่ (4.21) ถ้ากำหนดให้ $x = t - t_0$ ดังนั้น $dx = dt$ ดังนั้นจะได้ดังสมการที่ (4.22)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t-t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(x+t_0)} dx \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \\ &= e^{-j\omega t_0} F(\omega) \end{aligned} \quad (4.21)$$

ในทำนองเดียวกัน $\mathcal{F}[f(t+t_0)] = e^{j\omega t_0} F(\omega)$

กรณีศึกษาสำหรับตัวอย่างที่ 4.3

$$\mathcal{F}[e^{-at} u(t)] = \frac{1}{a + j\omega} \quad (4.22)$$

การแปลง $f(t) = e^{-(t-2)} u(t-2)$ จะได้ดังสมการที่ (4.23)

$$F(\omega) = \mathcal{F}[e^{-(t-2)} u(t-2)] = \frac{e^{-j2\omega}}{1 + j\omega} \quad (4.23)$$

4.3.4 คุณสมบัติการเลื่อนความถี่

เมื่อกำหนดให้ $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ ดังแสดงในสมการที่ (4.24)

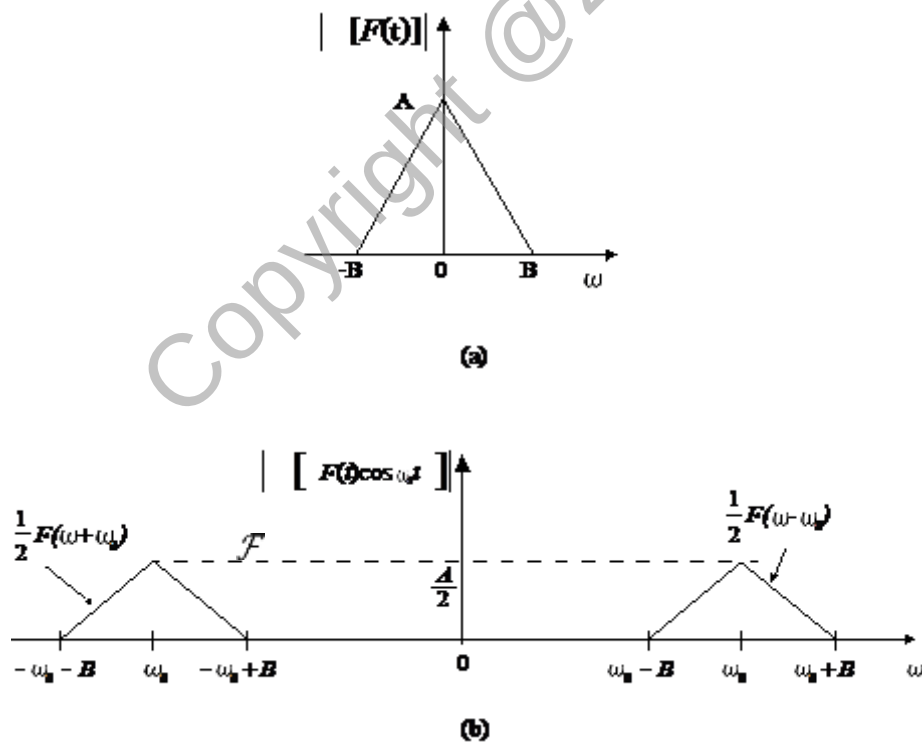
$$\mathcal{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0) \quad (4.24)$$

ความหมายของการเลื่อนความถี่ในโดเมนของความถี่จะต้องมีการเลื่อนเฟสของเวลาโดยสามารถให้คำจำกัดความดังสมการที่ (4.25)

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= F(\omega - \omega_0) \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

สำหรับกรณีศึกษา $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$ โดยใช้คุณสมบัติของสมการที่ (4.24) และจะได้ผลลัพธ์ดังสมการที่ (4.26)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)\cos \omega_0 t] &= \frac{1}{2}[F(\omega)e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}[F(\omega)e^{-j\omega_0 t}] \\ &= \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0) \end{aligned} \quad (4.26)$$



รูปที่ 4.8 ขนาดสเปกตรัม (a) สัญญาณ $f(t)$

(b) การมอดูเลตสัญญาณ $f(t)\cos \omega_0 t$

4.3.5 อนุพันธ์ของเวลา

เมื่อกำหนดให้ $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega) \quad (4.27)$$

และการเปลี่ยนรูปลาปลาซสามารถหาได้โดย

$$f(t) \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.28)$$

และจากสมการที่ (4.28) เมื่อทำการดิฟเฟอเรนเชียลทั้งสองข้างจะได้

$$f'(t) = \frac{j\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = j\omega \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

หรือ

$$F[f'(t)] = j\omega F(\omega) \quad (4.29)$$

เมื่อประยุกต์สมการที่ (4.29) ไปใช้งานจะได้สมการที่ (4.30)

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(\omega) \quad (4.30)$$

กรณีศึกษาถ้ากำหนดให้ $f(t) = e^{j\omega t} u(t)$ ดังนั้นจะได้

$$\mathcal{F}[f'(t)] = -ae^{-at} u(t) + e^{-at} \delta(t) = -af(t) + e^{-at} \delta(t) \quad (4.31)$$

และเมื่อทำการแปลงฟูเรียร์ของเทอมแรกและเทอมสุดท้าย จะได้

$$j\omega F(\omega) = -aF(\omega) + 1 \Rightarrow F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \quad (4.32)$$

4.3.6 อินทิเกรตเวลา

การวิเคราะห์แบบฟูเรียร์ เป็นเครื่องมือสำคัญที่ช่วยเชื่อมโยงระหว่างโดเมนเวลา และโดเมนความถี่เข้าด้วยกัน โดยเฉพาะเมื่อพิจารณาถึงกระบวนการอินทิเกรตเวลา (Time Integration) ซึ่งสะสมพฤติกรรมของสัญญาณหรือระบบพลวัตตลอดช่วงเวลาที่ผ่านมา คุณสมบัติการอินทิเกรตในโดเมนเวลานี้ไม่เพียงแต่ช่วยให้เราเข้าใจการตอบสนองของระบบ และมีบทบาทสำคัญทางคณิตศาสตร์ที่ส่งผลโดยตรงต่อโครงสร้างสเปกตรัมความถี่ เช่น การลดทอนสัญญาณรบกวนความถี่สูง และการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปพีชคณิตที่ง่ายต่อการคำนวณ การทำความเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างการอินทิเกรตเวลา และการแปลงฟูเรียร์จึงสำคัญในการวิเคราะห์ระบบ ควบคุมอัตโนมัติ และประมวลผลสัญญาณดิจิทัล

เมื่อกำหนดให้ $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{-t} f(t) dt\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \quad (4.33)$$

ถ้าแทน ω ด้วย 0 ลงในสมการที่ (4.8) จะได้

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (4.34)$$

$$\mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{-t} f(t) dt\right] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (4.35)$$

4.3.7 ทฤษฎีของ Reversal

คุณสมบัติการกลับเวลา (Time-Reversal Property) ในการวิเคราะห์แบบฟูเรียร์กำหนดให้เมื่อสัญญาณในโดเมนเวลาถูกกลับทิศทางเป็น $x(-t)$ สเปกตรัมในโดเมนความถี่จะสะท้อนกลับเป็น $x(-\omega)$ ด้วยเช่นกัน คุณสมบัตินี้มีบทบาทสำคัญในการวิเคราะห์ความสมมาตรของสัญญาณ เช่น การจำแนกฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันคี่ ตลอดจนช่วยอธิบายพฤติกรรมเชิงสเปกตรัม และการเปลี่ยนแปลงของระบบในงานประมวลผลสัญญาณได้อย่างแม่นยำ

เมื่อ $\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

ดังนั้นจะได้

$$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega) = F(\omega) \quad (4.36)$$

สำหรับตัวอย่างที่ 1 เมื่อ $1 = u(t) + u(-t)$ และทำการแปลงฟูเรียร์จะได้

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[1] &= \mathcal{F}[u(t)] + \mathcal{F}[u(-t)] \\ &= \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(-\omega) \\ &= 2\pi\delta(\omega)\end{aligned}$$

4.3.8 คุณสมบัติของสัญญาณแบบคู่

คุณสมบัติของสัญญาณแบบคู่ ถ้า $F(\omega)$ คือการแปลงฟูเรียร์ของ $f(t)$ ดังนั้นการแปลงฟูเรียร์ของ $F(t)$ คือ $2\pi f(-\omega)$ และสามารถเขียนสมการได้ดังสมการที่ (4.37)

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega) \quad (4.37)$$

เมื่อแสดงในรูปของคุณสมบัติที่สมมาตรของการแปลงฟูเรียร์ และสามารถเขียนใหม่ได้

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

หรือ

$$2\pi f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.38)$$

เมื่อแทน $t = -t$ จะได้

$$\begin{aligned}2\pi f(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \\ 2\pi f(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt = F[F(t)]\end{aligned} \quad (4.39)$$

สำหรับกรณีตัวอย่างเมื่อให้ $f(t) = e^{-|t|}$ ดังนั้นจะได้

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega^2 + 1} \quad (4.40)$$

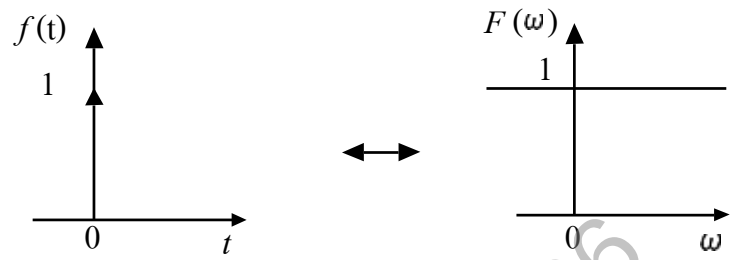
ดังนั้นการแปลงฟูเรียร์ของ $F(t) = 2/(t^2 + 1)$ คือ

$$2\pi f(\omega) = 2\pi e^{-|\omega|} \quad (4.41)$$

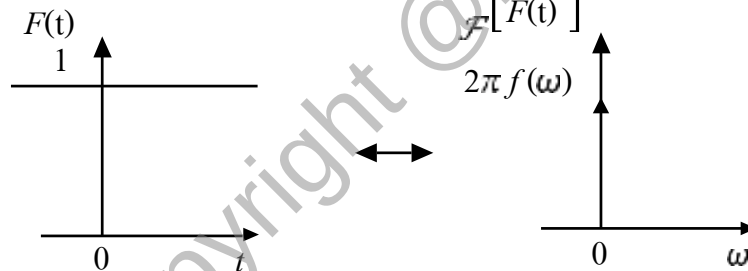
4.4 คุณสมบัติคอนโวลูชันสำหรับการแปลงฟูเรียร์

ถ้ากำหนดให้ $x(t)$ คือ สัญญาณอินพุตในวงจรใด ๆ และสัญญาณอิมพัลส์ของ $h(t)$ ดังนั้น ผลตอบสนองด้านออกคือ $y(t)$ คือ กำหนดการอินทิเกรตคอนโวลูชัน และสามารถแสดงชนิดสัญญาณของคุณสมบัติสัญญาณแบบคู่ของการแปลงฟูเรียร์ได้ดังรูปที่ 4.9

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda \quad (4.42)$$



(a)



(b)

รูปที่ 4.9 ชนิดสัญญาณของคุณสมบัติสัญญาณแบบคู่ของการแปลงฟูเรียร์

(a) การแปลงสัญญาณอิมพัลส์ (b) การแปลงของสัญญาณกระแสดตรง

ถ้า $X(\omega)$, $H(\omega)$ และ $Y(\omega)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $x(t)$, $h(t)$ และ $y(t)$ สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (4.43)

$$Y(\omega) = F[h(t) * x(t)] = H(\omega) X(\omega) \quad (4.43)$$

ซึ่งตัวบ่งชี้ของการคอนโวลูชันในรูปของโดเมนเวลาจะเกี่ยวกับผลคูณในรูปแบบของโดเมนความถี่ เพื่อทำการเปลี่ยนรูปคุณสมบัติคอนโวลูชัน ซึ่งสามารถแปลงฟูเรียร์ทั้งสองด้านของสมการที่ (4.42) และสามารถแสดงดังสมการที่ (4.44)

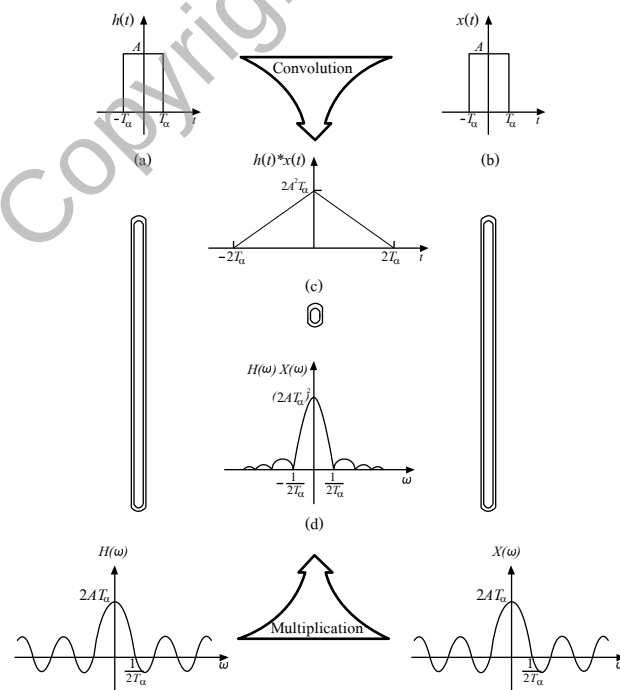
$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t-\lambda) d\lambda \right] e^{-j\omega t} dt \quad (4.44)$$

การเปลี่ยนรูปแบบของการอินทิเกรต และแฟกเตอร์ $h(\lambda)$ ซึ่งจะไม่ขึ้นกับค่า t ดังนั้นจะได้

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda) e^{-j\omega t} dt \right] d\lambda$$

สำหรับหารอินทิเกรตภายในวงเล็บ $\tau = t - \lambda$ ดังนั้น $\tau = t + \lambda$ และ $dt = d\tau$

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau+\lambda)} d\tau \right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j\omega\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= H(\omega) X(\omega) \end{aligned} \quad (4.45)$$



รูปที่ 4.10 คุณสมบัติคอนโวลูชัน

ในรูปที่ 4.10 แสดงคุณสมบัติของการคอนโวลูชันทั้งสัญญาณ $h(t)$ และ $x(t)$ และการคูณในโดเมนเวลาจะสัมพันธ์กับโดเมนความถี่ เมื่อ $f(t) = f_1(t) f_2(t)$ ดังนั้นจะได้สมการที่ (4.46) และ (4.47)

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega)^* F_2(\omega) \quad (4.46)$$

หรือ

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda) F_2(\omega - \lambda) d\lambda \quad (4.47)$$

ซึ่งการคอนโวลูชันในรูปของโดเมนความถี่ที่สามารถพิสูจน์ได้ดังสมการที่ (4.48) ที่ได้จากคุณสมบัติของฟังก์ชันแบบคูในสมการที่ (4.38)

เมื่อทำการลดรูปโดยใช้คุณสมบัติการอินทิเกรตเวลาในสมการที่ (4.33) ถ้าแทนด้วย $x(t)$ กับฟังก์ชันแบบขั้น (Unit Step Function) $u(t)$ และ $h(t)$ กับ $f(t)$ ในสมการที่ (4.42) และสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (4.49)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda) \alpha(t - \lambda) d\lambda = f(t)^* \alpha(t) \quad (4.48)$$

$$u(t - \lambda) = \begin{cases} 1, & t - \lambda > 0 \\ 0, & t - \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^t (\lambda) d\lambda = u(t)^* f(t)$$

และเมื่อแทนค่าในสมการ (4.48) ในช่วงการอินทิเกรตของ $[-\infty, \infty]$ ถึง $[-\infty, t]$ ดังนั้นสมการที่ (4.49) จะกลายเป็น

$$F \left[\int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \right] = U(\omega) F(\omega) \quad (4.49)$$

$$U(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$F \left[\int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \right] = \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right) F(\omega)$$

$$= \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \quad (4.50)$$

ซึ่งคือการอินทิเกรตคุณสมบัติเวลาของสมการที่ (4.34) และในสมการ (4.51)
 $F(\omega)\delta(\omega) = F(0)\delta(\omega)$ เมื่อ $\delta(\omega)$ คือ $\omega = 0$

ตารางที่ 4.1 คุณสมบัติของการแปลงฟูเรียร์

คุณสมบัติ	โดเมนเวลา $f(t)$	โดเมนความถี่ $F(\omega)$
แบบเชิงเส้น	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
สเกล	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
เลื่อนเวลา	$f(t-a)$	$e^{-j\omega a} F(\omega)$
เลื่อนความถี่	$e^{-j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
มอดดูเลต	$\cos(\omega_0 t) f(t)$	$\frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$
อนุพันธ์เวลา	$\frac{df}{dt}$ $\frac{d^n f}{dt^n}$	$j\omega F(\omega)$ $(j\omega)^n F(\omega)$
อินทิเกรตเวลา	$\int_{-\infty}^t f(t) dt$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
อนุพันธ์ความถี่	$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$
การแปลงกลับ	$f(-t)$	$F(-\omega)$ หรือ $F(\omega)$
การเป็นคู่	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
การคอนโวลชันใน t	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega) F_2(\omega)$
การคอนโวลชันใน ω	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

ตารางที่ 4.2 คู่การแปลงฟูเรียร์

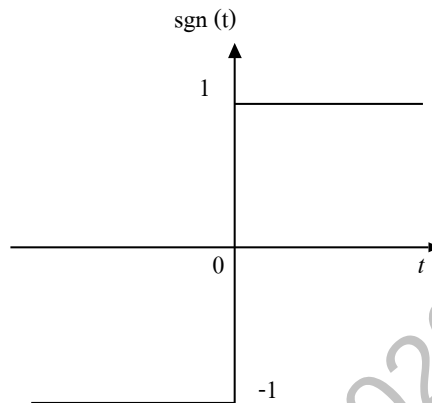
โดเมนเวลา $f(t)$	โดเมนความถี่ $F(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$u(t+\tau) - u(t-\tau)$	$2\frac{\sin \omega\tau}{\omega}$
$ t $	$-\frac{2}{\omega^2}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{a-j\omega}$
$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n}{(a+j\omega)^{n+1}}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\sin \omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$e^{-at} \sin \omega_0 t u(-t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \cos \omega_0 t u(-t)$	$\frac{a + \omega_0}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2}$

ตัวอย่างที่ 4.4 จงหาการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $\text{sgn}(t)$ ดังแสดงในรูปที่ 4.11

(b) $e^{-a|t|}$

(c) $(\sin t)/t$



รูปที่ 4.11 ประกอบตัวอย่างที่ 8.4

วิธีทำ

(a) **วิธีที่ 1** เมื่อเขียน signum function ในเทอมของฟังก์ชันแบบขั้น $\text{sgn}(t) = f(t) = u(t) - u(-t)$ จากสมการที่ (4.36)

$$U(\omega) = \mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

และเมื่อใช้คุณสมบัติการแปลงกลับ จะได้

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] &= U(\omega) - U(-\omega) \\ &= \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) - \left(\pi\delta(-\omega) + \frac{1}{-j\omega} \right) = \frac{2}{j\omega} \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 เมื่อ $\delta(\omega) = \delta(-\omega)$ และ signum function

$$f(t) = \text{sgn}(t) = -1 + 2u(t)$$

เมื่อทำการแปลงฟูเรียร์ในแต่ละเทอมจะได้

$$U(\omega) = -2\pi\delta(\omega) + 2\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) = \frac{2}{j\omega}$$

วิธีที่ 3 เมื่อทำการแปลงค่าในแต่ละเทอมจะได้

$$f'(t) = 2\delta(t)$$

เมื่อทำการแปลงฟูเรียร์ทั้งสองข้างจะได้

$$j\omega F(\omega) = 2 \Rightarrow F(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

(b) กรณีการแปลงฟูเรียร์ทั้งสองข้างที่เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-a|t|} \\ &= e^{-a|t|}u(t) + e^{-a|t|}u(-t) \\ &= y(t) + y(-t) \end{aligned}$$

เมื่อ $y(t) = e^{-a|t|}u(t)$ ดังนั้น $Y(\omega) = 1/(a + j\omega)$

จากคุณสมบัติของ Reversal จะได้

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-a|t|}] &= Y(\omega) + Y(-\omega) \\ &= \left(\frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} \right) \\ &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

(c) จากตัวอย่างที่ 4.2

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] &= \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \\ &= \tau \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \end{aligned}$$

เมื่อ $\frac{\tau}{2} = 1$

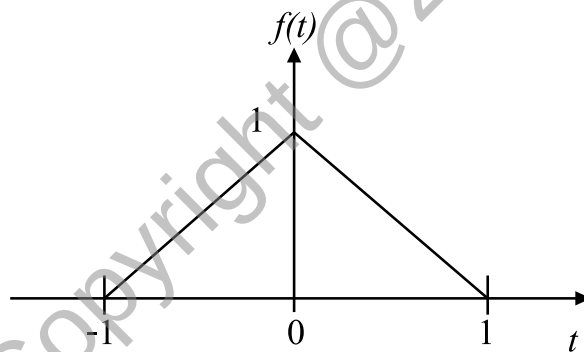
$$\mathcal{F}[u(t+1) - u(t-1)] = 2 \frac{\sin \omega}{\omega}$$

$$\mathcal{F}\left[2 \frac{\sin t}{t}\right] = 2\pi [U(\omega+1) - U(\omega-1)]$$

หรือ

$$\mathcal{F}\left[2 \frac{\sin t}{t}\right] = \pi [U(\omega+1) - U(\omega-1)]$$

ตัวอย่างที่ 4.5 จงแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันในรูปที่ 4.12



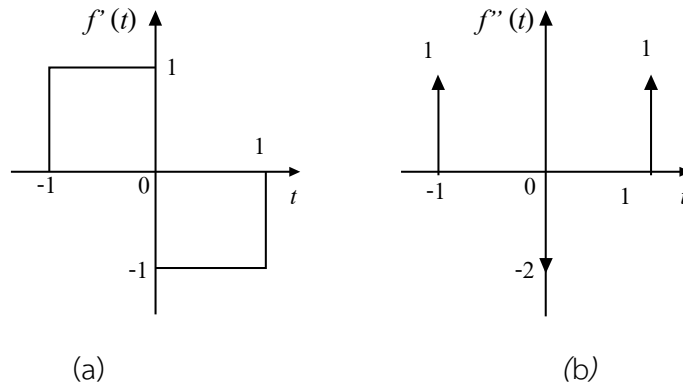
รูปที่ 4.12 สำหรับตัวอย่างที่ 4.5

วิธีทำ สามารถในการแปลงฟูเรียร์ได้โดยตรงจากสมการที่ (4.8) แต่จะง่ายกว่าถ้าใช้คุณสมบัติของการลดรูปดังแสดงได้ในฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f(t) = \begin{cases} 1+t, & -1 < t < 0 \\ 1-t, & 0 < t < 1 \end{cases}$$

$$f'(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ -1, & 0 < t < 1 \end{cases}$$

ซึ่งสามารถแสดงได้ในรูปที่ 4.13



รูปที่ 4.13 ลำดับที่ 1 และลำดับที่ 2 ของฟังก์ชัน $f(t)$

ที่ลำดับที่ 2 ในรูปที่ 4.13 (b) และกำหนดให้โดย

$$f''(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t) - \delta(t-1)$$

เมื่อทำการแปลงฟูเรียร์ทั้งสองข้างจะได้

$$(j\omega)^2 F(\omega) = e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega} = -2 + 2\cos\omega$$

หรือ

$$F(\omega) = \frac{2(1 - \cos\omega)}{\omega^2}$$

ตัวอย่างที่ 4.6 จงแปลงฟูเรียร์แบบผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

(a)
$$F(\omega) = \frac{10j\omega + 4}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8}$$

(b)
$$G(\omega) = \frac{\omega^2 + 21}{\omega^2 + 9}$$

วิธีทำ

(a) เพื่อเป็นการเลี่ยงการวิเคราะห์แบบจำนวนเชิงซ้อนดังนั้นสามารถแทน $j(\omega)$ และใช้หลักการแยกเศษส่วนย่อย

$$F(s) = \frac{10s + 4}{s^2 + 6s + 8} = \frac{10s + 4}{(s + 4)(s + 8)} = \frac{A}{s + 4} + \frac{B}{s + 2}$$

เมื่อ

$$A = (s + 4)F(s)\Big|_{s=-4} = \frac{10s + 4}{(s + 2)}\Big|_{s=-4} = \frac{-36}{-2} = 18$$

$$B = (s + 2)F(s)\Big|_{s=-2} = \frac{10s + 4}{(s + 4)}\Big|_{s=-2} = \frac{-16}{2} = -8$$

เมื่อแทน $A = 18$ และ $B = -8$ ใน $F(\omega)$ และ สกับ $j\omega$

$$F(j\omega) = \frac{18}{j\omega + 4} + \frac{-8}{j\omega + 2}$$

จากนั้นใช้การแปลงฟูเรียร์จากตารางที่ 4.2 ในการแปลงกลับฟูเรียร์จะได้

$$f(t) = (18e^{-4t} - 8e^{-2t})u(t)$$

(b)

$$G(\omega) = \frac{\omega^2 + 21}{\omega^2 + 9} = 1 + \frac{12}{\omega^2 + 9}$$

$$g(t) = \delta(t) + 8e^{-3|t|}$$

4.5 การประยุกต์การแปลงฟูเรียร์ในวงจรไฟฟ้า

การแปลงฟูเรียร์เป็นการสร้างของเฟสเซอร์ที่เป็นฟังก์ชันไม่ซ้ำคาบ และการใช้การแปลงฟูเรียร์ในวงจรไฟฟ้าที่ฟังก์ชันไม่เป็นไซน์ จากกฎของโอห์มดั่งสมการ (4.51)

$$V(\omega) = Z(\omega)I(\omega) \quad (4.51)$$

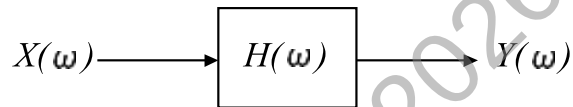
เมื่อ $V(\omega)$ และ $I(\omega)$ คือ การแปลงฟูเรียร์ของแรงดัน กระแส และ $Z(\omega)$ คือ ค่าอิมพีแดนซ์ของวงจรซึ่งค่าของอิมพีแดนซ์อาจประกอบด้วยตัวต้านทาน (R) ตัวเหนี่ยวนำ (L) และ ตัวเก็บประจุ (C) เมื่อแปลงค่า R L และ C ให้อยู่ในรูปของความถี่สามารถแสดงได้ดั่งสมการที่ (4.52)

$$\left. \begin{array}{l} R \Rightarrow R \\ L \Rightarrow j\omega L \\ C \Rightarrow \frac{1}{j\omega C} \end{array} \right\} \quad (4.52)$$

เมื่อค่าอินพุต คือ

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (4.53)$$

การแสดงความสัมพันธ์ของสัญญาณอินพุตกับสัญญาณด้านเอาต์พุตในโดเมนความถี่สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.14 และสามารถแสดงสมการของด้านเอาต์พุตได้ดังสมการที่ (4.54) และสมการที่ (4.55)



รูปที่ 4.14 ความสัมพันธ์ของอินพุตในรูปโดเมนความถี่

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) \quad (4.54)$$

$$Y(\omega) = H(\omega) = Fu[h(t)] \quad (4.55)$$

ตัวอย่างที่ 4.7 จงหาค่า $v_o(t)$ ในวงจรในรูปที่ 4.7 เมื่อ $v_t(t) = 2e^{-3t}u(t)$

วิธีทำ

เมื่อการแปลงฟูเรียร์ของแรงดันอินพุตคือ

$$V_i(\omega) = \frac{2}{3 + j\omega}$$

และสามารถหาทรานเฟอร์ฟังก์ชันได้โดยการหารระหว่างแรงดันเอาต์พุตกับอินพุต

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)}$$

$$= \frac{1/j\omega}{2 + 1/j\omega}$$

$$= \frac{1}{1 + j2\omega}$$

เมื่อค่าแรงดันอินพุต คือ

$$V_o(\omega) = V_i(\omega)H(\omega)$$

$$= \frac{2}{(3 + j\omega)(1 + j2\omega)}$$

$$V_o(\omega) = \frac{2}{(3 + j\omega)(0.5 + j\omega)}$$

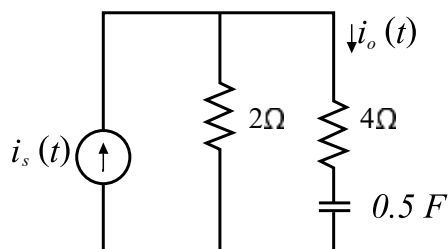
เมื่อทำการแยกเศษส่วนย่อยจะได้

$$V_o(\omega) = \frac{-0.4}{3 + j\omega} + \frac{0.4}{0.5 + j\omega}$$

และเมื่อแปลงคำตอบจากโดเมนความถี่สู่โดเมนเวลาจะได้

$$v_o(t) = 0.4(e^{-0.5t} - e^{-3t})u(t)$$

ตัวอย่างที่ 4.8 จงใช้การแปลงฟูเรียร์หาค่า $i_o(t)$ ในรูปที่ 4.15 เมื่อกำหนดให้ $i_s(t) = 10\sin 2t$



รูปที่ 4.15

วิธีทำ

เมื่อทรานฟอร์มฟังก์ชันระหว่างกระแสคือ

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \frac{I_o(\omega)}{I_s(\omega)} \\
 &= \frac{2}{2 + 4 + 2/j\omega} \\
 &= \frac{j\omega}{1 + j\omega 3}
 \end{aligned}$$

ถ้า $i_s(t) = 20 \sin 2t$

$$I_s(\omega) = j\pi 10 [\delta(\omega + 2) - \delta(\omega - 2)]$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 I_o(\omega) &= H(\omega) I_s(\omega) \\
 &= \frac{10\pi\omega [\delta(\omega - 2) - \delta(\omega + 2)]}{1 + j\omega 3}
 \end{aligned}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
 i_o(t) &= F^{-1} [I_o(\omega)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{10\pi\omega [\delta(\omega - 2) - \delta(\omega + 2)]}{1 + j\omega 3} d\omega
 \end{aligned}$$

และสามารถใช้คุณสมบัติการเลื่อนได้

$$\delta(\omega - \omega_0) f(\omega) = f(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0)$$

หรือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) f(\omega) d\omega = f(\omega_0)$$

และเมื่อหาค่าจะได้

$$i_o(t) = \frac{10\pi}{2\pi} \left[\frac{2}{1 + j6} e^{2t} - \frac{-2}{1 - j6} e^{j2t} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= 10 \left[\frac{e^{j2t}}{6.082e^{j80.54^\circ}} + \frac{e^{-j2t}}{6.082e^{-j80.54^\circ}} \right] \\
&= 1.644 \left[e^{j(2t-80.54^\circ)} + e^{-j(2t-80.54^\circ)} \right] \\
&= 3.288 \cos(2t - 80.54^\circ) \text{ A}
\end{aligned}$$

4.6 ทฤษฎีของ Parseval's

ทฤษฎีของ Parseval's เป็นอีกวิธีหนึ่งที่จะช่วยในการแปลงฟูเรียร์ที่พิจารณาในรูปของพลังงาน โดยการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $p(t)$

เมื่อ $p(t)$ คือกำลังของสัญญาณ และสามารถหาพลังงานจากสมการที่ (4.56)

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt \quad (4.56)$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อทำการเปรียบเทียบพลังงานที่ 1Ω คือ การคำนวณพลังงาน $p(t) = v^2(t) = i^2(t) = f^2(t)$ สำหรับ $f^2(t)$ แทนด้วยแรงดันหรือกระแส และสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (4.57)

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (4.57)$$

การคำนวณหาค่าพลังงานจากทฤษฎีของพาสเวิร์ดสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.58) ในรูปของโดเมนความถี่

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (4.58)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนรูปโดยการแทนสมการที่ (4.57) ลงในสมการที่ (4.58) จะได้สมการที่ (4.59)

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \quad (4.59)$$

เมื่อทำการอินทิเกรต

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) F(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt \quad (4.60)$$

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(-\omega)t} dt \right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega \quad (4.61)$$

ถ้ากำหนดให้ $z = x + jy$, $zz^* = (x + jy)(x - jy) = x^2 + y^2 = |z|^2$ ดังนั้นจะได้

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (4.62)$$

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (4.63)$$

และเมื่อทำการอินทิเกรตจาก $\omega_1 < \omega < \omega_2$

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (4.64)$$

ตัวอย่างที่ 4.9 จงหาค่าพลังงานที่จ่ายให้กับตัวต้านทาน $10\ \Omega$ เมื่อมีแรงดันตกคร่อม

$$v(t) = 5e^{-3t}u(t)\text{ V}$$

วิธีทำ

เมื่อ $f(t) = v(t)$ หรือ $F(\omega) = V(\omega)$ และพิจารณาในรูปโดเมนเวลา

$$\begin{aligned} W_{1\Omega} &= 10 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \\ &= 10 \int_{-\infty}^{\infty} 25e^{-6t} dt \\ &= \left| 2.5 \frac{e^{-6t}}{-6} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{2.5}{6} = 41.67\text{ J} \end{aligned}$$

$$F(\omega) = V(\omega) = \frac{5}{3 + j\omega}$$

ดังนั้น

$$|F(\omega)|^2 = F(\omega) F^*(\omega) = \frac{25}{9 + \omega^2}$$

ดังนั้นสามารถหาพลังงานที่จ่ายจะได้

$$W_{1\Omega} = \frac{10}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{10}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{25}{9 + \omega^2} d\omega$$

$$= \frac{250}{\pi} \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\omega}{3} \right) \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{250}{\pi} \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{250}{6}$$

$$= 41.67 J$$

4.7 การประยุกต์ใช้การแปลงฟูเรียร์

นอกเหนือจากประโยชน์ของการแปลงฟูเรียร์ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าแล้ว ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในด้านอื่น ๆ เช่น การวิเคราะห์สัญญาณ ออปติคัลสเปกโทรสโกป สัญญาณเสียง วิทยาการคอมพิวเตอร์ และวิศวกรรมไฟฟ้า โดยในงานด้านวิศวกรรมไฟฟ้านั้น สามารถประยุกต์ใช้ในระบบสื่อสารและการวิเคราะห์สัญญาณ ทั้งในส่วนของการตอบสนองความถี่และสเปกตรัมของสัญญาณ ซึ่งกรณีศึกษาการนำไปประยุกต์ใช้งาน 2 กรณี ได้แก่ การมอดูเลตขนาด และการสุ่มสัญญาณ หรือการแซมปลิงสัญญาณ

4.7.1 การมอดูเลตขนาด

การแพร่ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า หรือการส่งผ่านข้อมูลผ่านบรรยากาศ ได้กลายเป็นส่วนที่จำเป็นของเทคโนโลยีและวิทยาศาสตร์สมัยใหม่ อย่างไรก็ตาม การส่งสัญญาณผ่านบรรยากาศจะมีความถี่สูงกว่า 20 kHz และการส่งสัญญาณเสียงที่มีประสิทธิภาพสูงจะอยู่ในช่วง 50 Hz ถึง 20

kHz แต่การส่งสัญญาณเสียงส่วนใหญ่จะใช้อย่านความถี่ร่วมกันที่ ย่านความถี่เสียงต่ำ ซึ่งสามารถควบคุมได้โดยใช้คลื่นพาห์ (Carrier) โดยคลื่นพาห์มีสามคุณสมบัติที่สำคัญ ได้แก่ ขนาด (Amplitude) ความถี่ (Frequency) และเฟส (Phase) ซึ่งสามารถควบคุมได้โดยการมอดูเลตขนาด

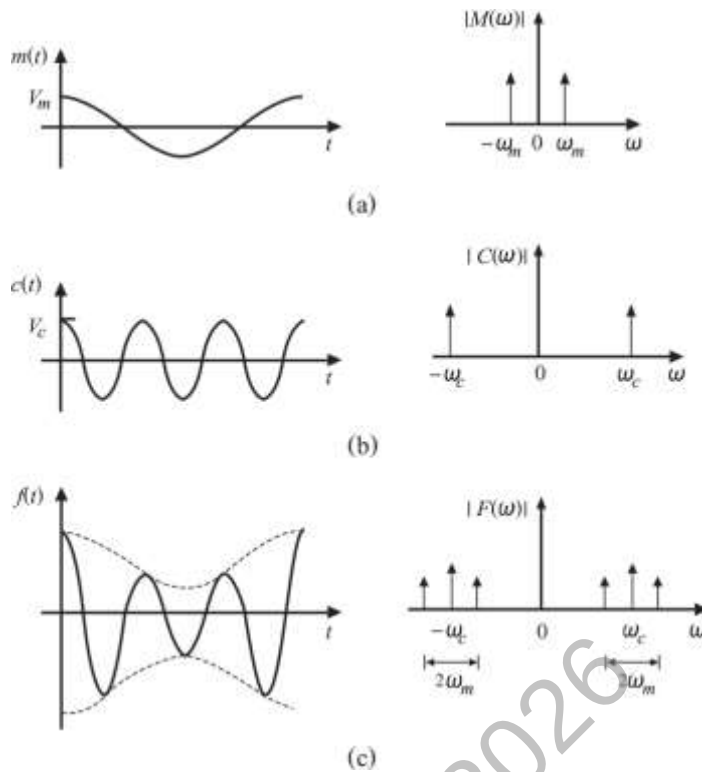
นิยามของการมอดูเลตเชิงขนาด (Amplitude Modulation: AM) คือ การที่ขนาดของคลื่นพาห์ถูกควบคุมให้เปลี่ยนแปลงไปตามขนาดของสัญญาณข้อมูล (Modulating signal) โดย AM มักถูกนำมาประยุกต์ใช้ในการส่งสัญญาณวิทยุกระจายเสียงพื้นฐาน รวมถึงการส่งสัญญาณภาพในระบบเครื่องรับโทรทัศน์ ทั้งนี้ สมมุติให้สัญญาณข้อมูล เช่น สัญญาณเสียงพูดหรือสัญญาณดนตรี เป็นสัญญาณมอดูเลตทั่วไปที่ต้องการส่งออกไปในลักษณะ $m(t) = V_m \cos \omega_m t$ ในระหว่างแครี่เรียความถี่สูง $c(t) = V_c \cos \omega_c t$ คือ เมื่อ $\omega_c \times \omega_m$ ดังนั้น สัญญาณ AM ของ $f(t)$ สามารถหาโดย

$$f(t) = V_c [1 + m(t)] \cos \omega_c t \quad (4.65)$$

ในรูปที่ 4.22 แสดงการมอดูเลตสัญญาณ $m(t)$ สัญญาณแครี่เรีย $c(t)$ และสัญญาณ AM $f(t)$ ที่สามารถแสดงผลได้ในสมการที่ (4.66) หรือสามารถพิจารณาได้ในตัวอย่างที่ 4.1 หรือในตารางที่ 4.1

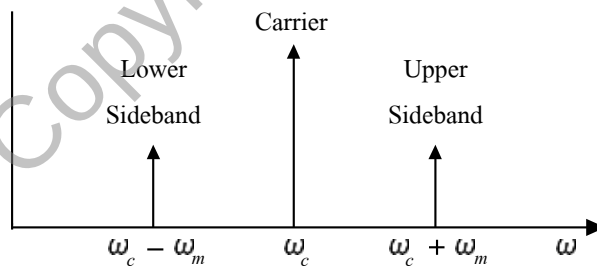
$$\left. \begin{aligned} Fu(\omega) &= F[V_c \cos \omega_c t] + F[V_c m(t) \cos \omega_c t] \\ &= V_c \pi \left[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c) \right] + \frac{V_c}{2} \left[M(\omega - \omega_c) + M(\omega + \omega_c) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.66)$$

เมื่อ $M(\omega)$ คือการแปลงฟูเรียร์ของการมอดูเลตสัญญาณ $m(t)$ ที่แสดงในรูปที่ 4.16 คือ สเปกตรัมความถี่ของสัญญาณ AM จะเป็นตัวบ่งชี้ของสัญญาณที่ประกอบด้วย ของสัญญาณแครี่เรีย และสองสัญญาณรูปคลื่นไซน์ที่ความถี่ $\omega_c - \omega_m$ ซึ่งเป็นค่าในย่านความถี่ต่ำ ในระหว่างหนึ่งความถี่ $\omega_c + \omega_m$ เป็นย่านความถี่สูง



รูปที่ 4.16 แสดงสัญญาณในโดเมนเวลาและความถี่ของ

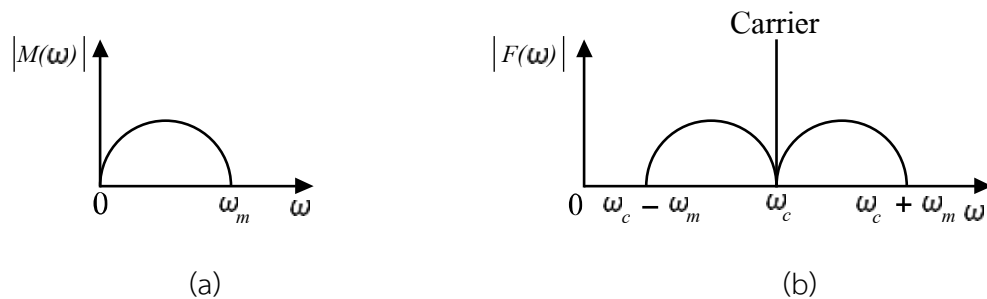
(a) การมอดูเลตสัญญาณ (b) สัญญาณแครี่เรีย (c) สัญญาณ AM



รูปที่ 4.17 สเปกตรัมความถี่ของสัญญาณ AM

หมายเหตุ การมอดูเลตสัญญาณ คือเป็นการวิเคราะห์สัญญาณไซน์ และในระบบจริงเมื่อ $m(t)$ คือสัญญาณที่ไม่เป็นสัญญาณไซน์ 100 เปอร์เซ็นต์ และในช่วงสัญญาณที่กำหนดความถี่ของสเปกตรัมสัญญาณที่อยู่ระหว่างย่าน 0 ถึง $\omega_u = 2\pi f_u$ เมื่อกำหนดให้ $f(u) = 5\text{kHz}$ สำหรับสัญญาณวิทยุ AM ถ้าสัญญาณสเปกตรัมความถี่ของการมอดูเลตสัญญาณที่แสดงในรูปที่ 4.18 (a)

ดังนั้นสเปกตรัมความถี่สัญญาณของการมอดูเลตสัญญาณสามารถแสดงดังรูปที่ 4.18 (b) ดังนั้นเพื่อ
การหลีกเลี่ยงการเชื่อมต่อใด ๆ สำหรับสัญญาณแครี่ที่แยกจาก 10 kHz



รูปที่ 4.18 สเปกตรัมความถี่ (a) สัญญาณมอดูเลต (b) สัญญาณ AM

ตัวอย่างที่ 4.10 สัญญาณเสียงเพลงมีองค์ประกอบความถี่จาก 15Hz ถึง 30kHz ถ้าสัญญาณเสียงใช้
การมอดูเลตที่ 1.2 MHz ของแครี่สัญญาณ จงหาย่านของความถี่สำหรับช่วงต่ำสุดและสูงสุด

วิธีทำ

ช่วงต่ำสุดคือความแตกต่างของสัญญาณแครี่และการมอดูเลตความถี่ ดังนี้

$$1,200,000 - 30,000 \text{ Hz} = 1,170,000 \text{ Hz} \text{ ถึง } 1,200,000 - 15 \text{ Hz} = 1,199,985 \text{ Hz}$$

และย่านบนเป็นผลรวมของความถี่แครี่ และความถี่มอดูเลตดังนั้นสามารถแสดงความถี่ด้านสูง

$$1,200,000 - 15 \text{ Hz} = 1,200,015 \text{ Hz} \text{ ถึง } 1,200,000 + 30,000 \text{ Hz} = 1,230,000 \text{ Hz}$$

4.7.2 การแซมปลิง

ในระบบสัญญาณอนาล็อก และสัญญาณเป็นกระบวนการของระบบทั้งหมด อย่างไรก็ตาม
ระบบดิจิตอลแบบใหม่ จะต้องใช้การแซมปลิง (Sampling) ของสัญญาณสำหรับกระบวนการเปลี่ยน
สัญญาณจากอนาล็อกเป็นดิจิตอล นี่คือผลลัพธ์ของหลักการแซมปลิง และการแซมปลิงสามารถใช้
สัญญาณดิจิตอลที่ต่อเนื่อง $g(t)$ พิจารณาสัญญาณต่อเนื่อง ที่แสดงในรูปที่ 4.19 (a) และสามารถ
แสดงผลเป็นการคูณของสัญญาณ $\delta(t - nT_s)$ ที่แสดงในรูปที่ 4.19 (b) เมื่อ T_s คือช่วงการแซมปลิง
ของสัญญาณใด ๆ และความถี่ของการแซมปลิงคือ $f_s = 1/T_s$ หรือเรียกว่าการอัตราการแซมปลิง
(Sampling rate) และสัญญาณการแซมปลิงคือ $g_s(t)$ ดังแสดงดังสมการที่ (4.67)

$$g_s(t) = g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (4.67)$$

ดังนั้นการแปลงฟูรีเยร์

$$G_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(nT_s) F[\delta(t - nT_s)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) e^{-jn\omega T_s} \quad (4.68)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) e^{-jn\omega T_s} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) e^{-jn\omega T_s} \quad (4.69)$$

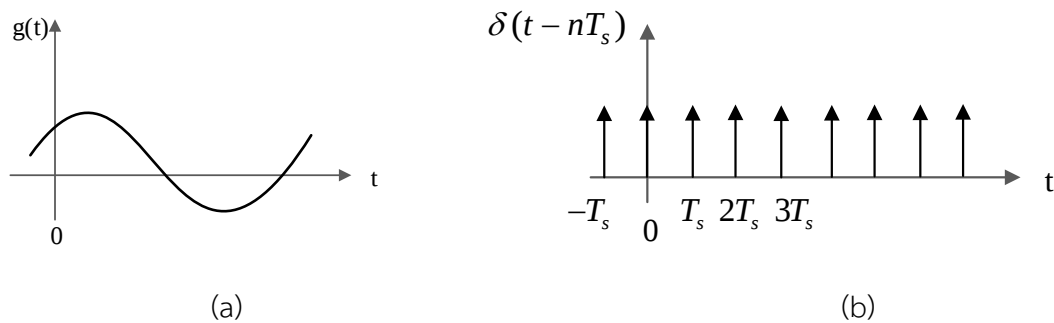
เมื่อ $\omega_s = 2\pi/T_s$ ดังนั้นเมื่อแทนค่าในสมการที่ (4.68) จะได้สมการที่ (4.70)

$$G_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega + n\omega_s) \quad (4.70)$$

จากสมการที่ (4.70) แสดงการแปลงฟูรีเยร์ของ $G_s(\omega)$ ที่เป็นการแซมปลิงสัญญาณ และผลรวมของการแปลงฟูรีเยร์ของสัญญาณเริ่มต้นที่อัตรา $1/T_s$ หรือในทำนองเดียวกัน สำหรับช่วงความกว้างของสัญญาณ W เฮิรท์ ซึ่งจะเป็นช่วงที่ไม่มีการสูญเสียของข้อมูล และการเลื่อมของสัญญาณ ถ้าการแซมปลิงความถี่ที่ความถี่สูงสุดในการมอดูเลตสัญญาณ ดังนั้นสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (4.71)

$$\frac{1}{T_s} = f_s \geq 2W \quad (4.71)$$

ดังนั้นจะได้ค่าความถี่ของการแซมปลิง $f_s = 2W$ ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีในชื่อ ความถี่ไนควิสต์ (Nyquist frequency) หรืออัตรา $1/f_s$ คือช่วงของไนควิสต์ (Nyquist interval)



รูปที่ 4.19 (a) สัญญาณต่อเนื่อง (b) การแซมปลิง

ตัวอย่างที่ 4.11 สัญญาณโทรศัพท์ที่มีความถี่ทอพอ 5 kHz มีอัตราการแซมปลิง 60 เปอร์เซนต์สูงสุด
กว่าอัตราค่าต่ำสุด จงหาอัตราการแซมปลิง

วิธีทำ อัตราแซมปลิงต่ำสุดคือ Nyquist rate

$$\text{Nyquist rate} = 2W = 2 \times 5 = 10 \text{ kHz}$$

$$f_s = 1.60 \times 2W = 16 \text{ kHz}$$

Copyright @2026

แบบฝึกหัดบทที่ 4

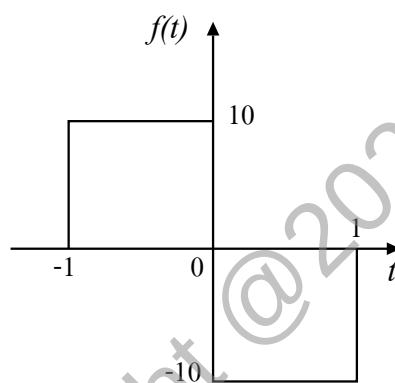
4.1 จงหาการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $g(t) = 4u(t+1) - 4u(t-2)$

(b) $g(t) = 4\delta(t+2)$

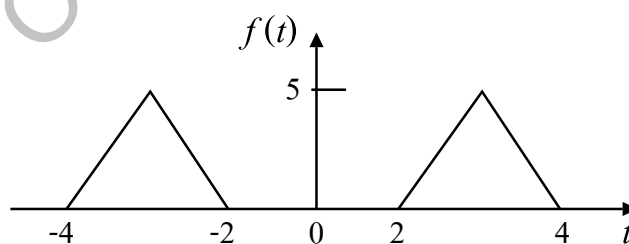
(c) $g(t) = 10 \sin \omega_0 t$

4.2 จงหาการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันในรูปที่ 4A



รูปที่ 4A

4.3 จงหาการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันดังรูปที่ 4B



รูปที่ 4B

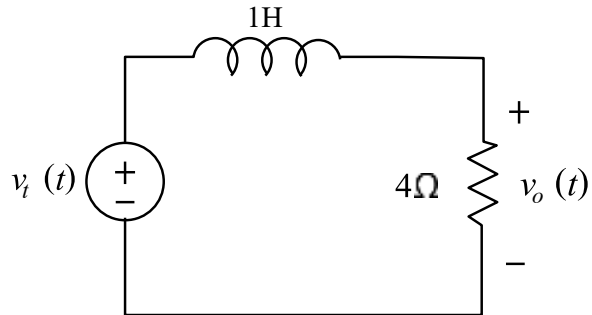
4.4 จงแปลงกลับฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$H(\omega) = \frac{6(3 + j2\omega)}{(1 + j\omega)(4 + j\omega)(2 + j\omega)}$$

4.5 จงแปลงกลับฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$Y(\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} + \frac{2(1+j\omega)}{(1+j\omega)^2 + 16}$$

4.6 จงหาค่า $v_o(t)$ ในรูปที่ 4C ถ้า $v_i(t) = 5\text{sgn}(t) = (-5 + 10u(t))\text{V}$



รูปที่ 4C

4.7 ถ้าสัญญาณแครี่เรียร์ 2 MHz ถูกมอดูเลตด้วยความถี่ 4MHz จงหาองค์ประกอบของความถี่สัญญาณ AM

เอกสารอ้างอิง

1. Bracewell, R. N. (2010). *The Fourier transform and its applications* (3rd ed.). McGraw-Hill.
2. Oppenheim, A. V., & Schaffer, R. W. (2014). *Discrete-time signal processing* (3rd ed.). Pearson.
3. Proakis, J. G., & Manolakis, D. G. (2022). *Digital signal processing: Principles, algorithms, and applications* (5th ed.). Pearson.
4. Mallat, S. (2009). *A wavelet tour of signal processing* (3rd ed.). Academic Press.
5. Strang, G. (1993). *Wavelets and filter banks*. Wellesley-Cambridge Press.
6. Papoulis, A. (1984). *Signal analysis*. McGraw-Hill.
7. Vetterli, M., Kovacevic, J., & Goyal, V. K. (2014). *Foundations of signal processing*. Cambridge University Press.
8. Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2011). *Fourier analysis: An introduction*. Princeton University Press.
9. Rathinasamy, S. (2016). *Signals and systems* (2nd ed.). McGraw-Hill.
10. Smith, S. W. (2013). *The scientist and engineer's guide to digital signal processing* (2nd ed.). California Technical Publishing.
11. Brigham, E. O. (1988). *The fast Fourier transform and its applications*. Prentice-Hall.
12. Roberts, M. J. (2004). *Signals and systems: Analysis using transform methods and MATLAB*. McGraw-Hill.
13. Poularikas, A. D. (2010). *Transforms and applications handbook* (3rd ed.). CRC Press.
14. Kammler, D. W. (2008). *A first course in Fourier analysis*. Cambridge University Press.
15. Folland, G. B. (1992). *Fourier analysis and its applications*. Wadsworth & Brooks/Cole.

บทที่ 5

ลาปลาซทรานส์ฟอร์ม และการแปลงลาปลาซผกผัน

5.1 บทนำ

การแปลงลาปลาซ เป็นผลการหาปริพันธ์ตลอดช่วงเวลาของฟังก์ชันที่มีสมาชิกเขตเวลา หรือโดเมนเวลา (Time-domain) แปลงเป็นฟังก์ชันที่มีสมาชิกเขตโดเมนความถี่เชิงซ้อน (Complex frequency-domain) หรือโดเมนเอส (S-domain) ซึ่งเป็นวิธีแก้ปัญหасмการเชิงอนุพันธ์ให้ง่ายขึ้นอีกวิธีหนึ่ง และสามารถแปลงผกผันลาปลาซหรือการแปลงลาปลาซกลับ มาเป็นคำตอบในฟังก์ชันโดเมนเวลาได้ด้วยการจัดรูปสมการทางพีชคณิต เพื่อศึกษาพฤติกรรมของฟังก์ชันที่เป็นเวลาต่าง ๆ ของระบบควบคุมในงานวิศวกรรมไฟฟ้าโดยเฉพาะพฤติกรรมสภาวะชั่วคราว (Transient Situation) ที่มีการตอบสนองทางธรรมชาติในเวลาสั้น ๆ แล้วหมดไป

5.2 นิยามของการแปลงลาปลาซ

ลาปลาซทรานส์ฟอร์มของฟังก์ชัน $f(t)$ เป็นฟังก์ชันของสัญญาณใด ๆ สามารถอินทิเกรต $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ เมื่อ s เป็นจำนวนจริงโดยการแปลงลาปลาซสามารถหาดังสมการที่ (5.1)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (5.1)$$

คุณสมบัติของลาปลาซแบบเชิงเส้น (Linearity property of the Laplace transform) สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (5.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{kf(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} kf(t) dt \\ &= k \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \end{aligned} \quad (5.2)$$

จากสมการที่ (5.2) k คือค่าคงที่ใด ๆ

ในทำนองเดียวกันเมื่อทำการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันผลบวกสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (5.3)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} (af(t) + bg(t)) dt \\
&= a \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + b \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt
\end{aligned} \tag{5.3}$$

จากสมการที่ (5.3) a และ b คือค่าคงจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่างที่ 5.1 จงแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = 1$

วิธีทำ จากสมการที่ (5.1)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

เมื่อแทนค่าจะได้

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} (1) dt \\
&= \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} \\
&= -\frac{1}{s} [e^{-s(\infty)} - e^0] \\
&= -\frac{1}{s} [0 - 1]
\end{aligned}$$

ตอบ
$$= \frac{1}{s}$$

ตัวอย่างที่ 5.2 จงแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = e^{at}$

วิธีทำ จากสมการที่ (5.1)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

เมื่อแทนค่าจะได้

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{-st}\} - \int_0^{\infty} e^{-st}(e^{at})dt &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\
&= \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{-(s-a)}(0-1) \\
&= \frac{1}{(s-a)}
\end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5.3 จงแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = t$

วิธีทำ จากสมการที่ (5.1)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

เมื่อแทนค่าจะได้

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} (t) dt \\
&= \left[\frac{te^{-st}}{-s} - \int \frac{te^{-st}}{-s} dt \right]_0^{\infty} \\
&= \left[\frac{te^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty} \\
&= \left[\frac{\infty e^{-s(\infty)}}{-s} - \frac{e^{-s(\infty)}}{s^2} \right] - \left[0 - \frac{e^0}{s^2} \right] \\
&= (0-1) - \left(0 - \frac{1}{s^2} \right) \\
&= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5.4 จงแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = \cos at$

วิธีทำ จากสมการที่ (5.1)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

เมื่อแทนค่าจะได้

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos at\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} (\cos at) dt \\ &= \left[\frac{e^{-st}}{s^2 + a^2} (a \sin at - s \cos at) \right]_0^{\infty} \\ &= \left[\frac{e^{-st}}{s^2 + a^2} (a \sin a(\infty) - s \cos a(\infty)) - \frac{e^{-0}}{s^2 + a^2} (a \sin 0 - s \cos 0) \right] \end{aligned}$$

ตอบ
$$= \frac{s}{s^2 + a^2}$$

ตัวอย่างที่ 5.5 จงแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = \sin at$

วิธีทำ จากสมการที่ (5.1)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

เมื่อแทนค่าจะได้

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin at\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} (\sin at) dt \\ &= \left[\frac{e^{-st}}{s^2 + a^2} (-s \sin at - a \cos at) \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s^2 + a^2} \left[e^{-s(\infty)} (-s \sin a(\infty) - a \cos a(\infty)) - e^{-0} (-s \sin 0 - a \cos 0) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s^2 + a^2} [(0) - 1(0 - a)]$$

$$\text{ตอบ} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

จากการแปลงลาปลาซแบบเชิงเส้นสามารถสรุปเป็นตารางการแปลงลาปลาซได้ดังตารางที่ 5.1

ตารางที่ 5.1 มาตรฐานการแปลงลาปลาซ

ประเภท (Type)	ฟังก์ชัน $f(t)$	$F(s)$
Impulse	$\delta(t)$	1
Step	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Exponential	e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$
Ramp	t	$\frac{1}{s^2}$
Damped ramp	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$
Sine	$\sin at$	$\frac{\omega}{s^2 + a^2}$
Cosine	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
Damped sine	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
Damped cosine	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$

ตัวอย่างที่ 5.6 จงแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = 1 + 2t - \frac{1}{3}t^4$

วิธีทำ

$$\mathcal{L}\left\{1 + 2t - \frac{1}{3}t^4\right\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{2t\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}\{t^4\}$$

$$= \frac{1}{s} + 2\left(\frac{1}{s^2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{4!}{s^{4+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{s^5}\right)$$

ตอบ
$$= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{8}{s^5}$$

ตัวอย่างที่ 5.7 จงแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = 5e^{2t} - 3e^{-t}$

วิธีทำ

$$\mathcal{L}\{5e^{2t} - 3e^{-t}\} = 5\mathcal{L}\{e^{2t}\} - 3\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

$$= 5\left(\frac{1}{s-2}\right) - 3\left(\frac{1}{s-(-1)}\right)$$

$$= \frac{5}{s-2} - \frac{3}{s+1}$$

$$= \frac{5(s+1) - 3(s-2)}{(s-2)(s+1)}$$

ตอบ
$$= \frac{s+11}{s^2 - s - 2}$$

ตัวอย่างที่ 5.8 จงแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = 6\sin 3t - 4\cos 5t$

วิธีทำ

$$\mathcal{L}\{6\sin 3t - 4\cos 5t\} = 6\mathcal{L}\{6\sin 3t\} - 4\mathcal{L}\{\sin 5t\}$$

$$= 6\left(\frac{3}{s^2 + 3^2}\right) - 4\left(\frac{s}{s^2 + 5^2}\right)$$

ตอบ
$$= \frac{18}{s^2 + 9} - \frac{4s}{s^2 + 25}$$

ตัวอย่างที่ 5.9 จงหาค่าการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $v(t) = 4e^{5t} + 6t^3 - 3\sin 4t + 2\cos 2t$

วิธีทำ

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = \mathcal{L}\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\sin 4t + 2\cos 2t\}$$

$$= 4\mathcal{L}\{e^{5t}\} + 6\mathcal{L}\{t^3\} - 3\mathcal{L}\{\sin 4t\} + 2\mathcal{L}\{\cos 2t\}$$

$$= \frac{4}{s-5} + 6\left(\frac{3!}{s^4}\right) - 3\left(\frac{4}{s^2 + 4^2}\right) + 2\left(\frac{s}{s^2 + 2^2}\right)$$

ตอบ
$$V(s) = \frac{4}{s-5} - \frac{36}{s^4} - \frac{12}{s^2 + 16} - \frac{2s}{s^2 + 4}$$

ตัวอย่างที่ 5.10 จงแปลงลาปลาซของฟังก์ชันแรงดัน $i(t)$ เมื่อ $i(t) = e^{-2t} \sin 4t$

วิธีทำ เมื่อทำการแปลงลาปลาซ

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-2t} \sin 4t\}$$

จากตารางที่ 5.2 การแปลงลาปลาซ

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

เมื่อสัมประสิทธิ์

$$a = -2$$

$$\omega = 4$$

และนำไปแทนค่าจะได้

$$\begin{aligned} \frac{4}{(s - (-2))^2 + (4)^2} &= \frac{4}{(s + 2)^2 + 16} \\ &= \frac{4}{s^2 + 4s + 4 + 16} \end{aligned}$$

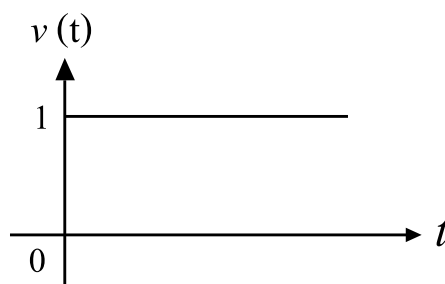
ตอบ
$$I(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 20}$$

5.3 การแปลงลาปลาซรูปคลื่นสัญญาณไฟฟ้า

การแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) ถือเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญในการวิเคราะห์ฟังก์ชัน และรูปคลื่นสัญญาณทางไฟฟ้า โดยช่วยเปลี่ยนการวิเคราะห์สัญญาณจากโดเมนเวลา (Time Domain) ไปสู่โดเมนความถี่เชิงซ้อน (s-Domain) เพื่อให้การคำนวณสะดวกยิ่งขึ้น ทั้งนี้ในการวิเคราะห์สัญญาณไฟฟ้าส่วนใหญ่ มักมุ่งเน้นพิจารณาที่เวลาเริ่มต้น คือตั้งแต่ $t = 0$ เป็นต้นไป

ตัวอย่างที่ 5.11 จงทำการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันแบบขั้นที่แสดงดังรูปที่ 5.1 เมื่อ

$$v(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



รูปที่ 5.1 สัญญาณแบบขั้น

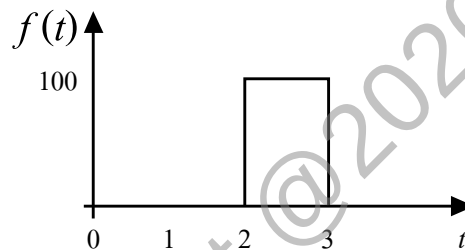
วิธีทำ

$$\mathcal{L}[v(t)] = \int_0^{\infty} v(t)e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{\infty} (1)e^{-st} dt$$

ตอบ $V(s) = \frac{1}{s}$

ตัวอย่างที่ 5.12 จงทำการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันในรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2 ฟังก์ชันแบบขั้น

วิธีทำ จากรูปที่ 5.2 เป็นฟังก์ชันแบบขั้น ดังนั้นสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$f(t) = 100[u(t-2) - u(t-3)]$$

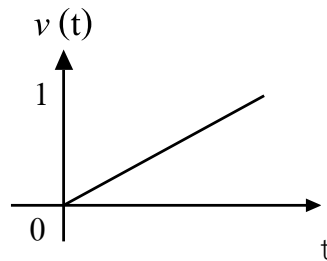
เมื่อทำการแปลงลาปลาซ โดยใช้ตารางที่ 5.2 จะได้

$$F(s) = 100 \left(\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} \right)$$

ตอบ $F(s) = \frac{100}{s} (e^{-2s} - e^{-3s})$

ตัวอย่างที่ 5.13 จงทำการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันในรูปที่ 5.3

$$v_r(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



รูปที่ 5.3 สัญญาณรูปคลื่นลาดชัน (Ramp Waveform)

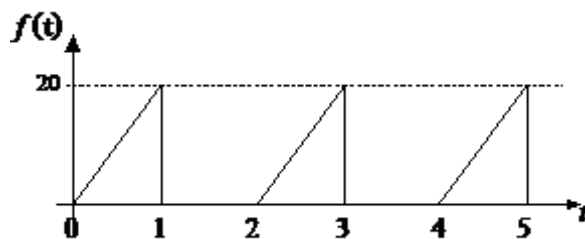
วิธีทำ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[v_r(t)] &= \int_0^{\infty} v_r(t) te^{-st} dt \\ &= \frac{e^{-st}}{s^2} \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

ตอบ

$$V_r(s) = \frac{1}{s^2}$$

ตัวอย่างที่ 5.14 จงทำการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน ในรูปที่ 5.4



รูปที่ 5.4 สัญญาณฟันเลื่อย

วิธีทำ จากรูปที่ 5.4 พบว่าสัญญาณสามเหลี่ยมกั้นฟังก์ชันแบบซ้ำคาบเมื่อคาบเวลา $T = 2$ ดังนั้นสามารถ เขียนสมการของฟังก์ชันสามเหลี่ยมได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 20[u(t) - u(t-1)] \\
 &= 20tu(t) - 20tu(t-1) \\
 &= 20tu(t) - 20tu(t-1+1)u(t-1) \\
 &= 20tu(t) - 20(t-1)u(t-1) - 20u(t-1)
 \end{aligned}$$

จากนั้นทำการแปลงลาปลาซโดยใช้คุณสมบัติของการเลื่อนเวลาในตารางที่ 5.1 จะได้

$$F(s) = \frac{20}{s} - 20 \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{20}{s} e^{-s}$$

$$F(s) = \frac{20}{s^2} (1 - e^{-s} - se^{-s})$$

ตอบ
$$F(s) = \frac{20}{s^2 (1 - e^{-2s})} (1 - e^{-s} - se^{-s})$$

5.4 การแปลงอนุพันธ์โดยใช้ลาปลาซ

5.4.1 การแปลงอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ลาปลาซ

กำหนดให้อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(t) = f'(t)$ ดังนั้นจากสมการ

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \quad (5.4)$$

เมื่อใช้การอินทิเกรตแบบพาส

$$\int u \frac{dv}{dt} dt = uv - \int v \frac{du}{dt} dt$$

เมื่อ $u = e^{-st}$ และ $\frac{dv}{dt} = f'(t)$

ดังนั้นเมื่อทำการดิฟเฟอเรนเชียล

$$\frac{du}{dt} = \frac{de^{-st}}{dt} = -se^{-st}$$

และ

$$v = \int f'(t) dt = f(t)$$

เมื่อ

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \left[e^{-st} f(t) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) (-se^{-st}) dt$$

$$= \left[0 - f(0) \right] + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$= -f(0) + s \mathcal{Z}\{f(t)\}$$

เมื่อ $e^{-st} f(t) \rightarrow 0$ เสมือน $t \rightarrow \infty$ และ $f(0)$ คือค่าของ $f(t)$ ที่ $t = 0$
เพราะฉะนั้นจะได้

$$\mathcal{Z}\{f'(t)\} = s \mathcal{Z}\{f(t)\} - f(0) \quad (5.5)$$

หรือ

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = s \mathcal{Z}\{y\} - y(0)$$

ตัวอย่างที่ 5.15 จงแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = k$

วิธีทำ

จากโจทย์เมื่อ $f(t) = k$ ดังนั้น $f'(t) = 0$ และ $f(0) = k$ เมื่อแทนค่าในสมการที่ (5.5) จะได้

$$\mathcal{Z}\{0\} = s \mathcal{Z}\{k\} - k$$

$$k = s \mathcal{Z}\{k\}$$

ตอบ $\mathcal{Z}\{k\} = \frac{k}{s}$

ตัวอย่างที่ 5.16 จงแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = 2t$

วิธีทำ

จากโจทย์เมื่อ $f(t) = 2t$ ดังนั้น $f'(t) = 2$ และ $f(0) = 0$ เมื่อแทนค่าในสมการที่ (5.5)

$$\mathcal{L}\{2\} = s\mathcal{L}\{2t\} - 0$$

$$\frac{2}{s} = s\mathcal{L}\{2t\}$$

ตอบ $\mathcal{L}\{2t\} = \frac{2}{s^2}$

ตัวอย่างที่ 5.17 จงแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = e^{-at}$

วิธีทำ

จากโจทย์เมื่อ $f(t) = e^{-at}$ ดังนั้น $f'(t) = -ae^{-at}$ และ $f(0) = 1$

เมื่อแทนค่าในสมการที่ (5.5)

$$\mathcal{L}\{-ae^{-at}\} = s\mathcal{L}\{e^{-at}\} - 1$$

$$-a\mathcal{L}\{e^{-at}\} = s\mathcal{L}\{e^{-at}\} - 1$$

$$1 = s\mathcal{L}\{e^{-at}\} + a\mathcal{L}\{e^{-at}\}$$

$$1 = (s+a)\mathcal{L}\{e^{-at}\}$$

ตอบ $\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{(s+a)}$

5.4.2 การแปลงอนุพันธ์อันดับสองโดยใช้ลาปลาซ

การพิจารณาสมการอันดับสองเมื่อกำหนดให้ $f(t)$ เป็น $f''(t)$ ดังนั้นจากสมการที่ (5.1)

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f''(t) dt \quad (5.6)$$

เมื่ออินทิเกรตโดยพาสสมการที่ (5.6) จะได้

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} f''(t) dt &= \left[e^{-st} f'(t) \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \\ &= [0 - f'(0)] + s \mathcal{L}\{f'(t)\} \end{aligned}$$

เมื่อ

ที่ $e^{-st} f'(t) \rightarrow 0$ และ $t \rightarrow \infty$ คือ ค่าของ $f'(t)$ ที่ $t = 0$ ดังนั้นจากสมการที่ (5.5)

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

หรือ

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y}{dx^2}\right\} = s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) \quad (5.7)$$

ตัวอย่างที่ 5.18 จงแปลงลาซ ของอนุพันธ์อันดับสองของสมการ $f(t) = \cos at$

วิธีทำ จากสมการที่ (5.7)

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

จากโจทย์ $f(t) = \cos at$ ดังนั้น

$$f'(t) = -a \sin at$$

และ

$$f''(t) = -a^2 \cos at$$

เมื่อ $f(0) = 1$ และ $f'(0) = 0$

เมื่อแทนเงื่อนไขต่าง ๆ ในสมการที่ (5.7)

$$\mathcal{L}\{-a \cos at\} = s^2 \mathcal{L}\{\cos at\} - s(1) - 0$$

$$\mathcal{L}\{-a^2 \cos at\} = s^2 \mathcal{L}\{\cos at\} - s(1) - 0$$

$$-a^2 \mathcal{L}\{\cos at\} = s^2 \mathcal{L}\{\cos at\} - s$$

$$s = (s^2 + a^2) \mathcal{L}\{\cos at\}$$

ตอบ
$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{(s^2 + a^2)}$$

5.5 การแปลงลาปลาซผกผัน

5.5.1 คำจำกัดความของการแปลงลาปลาซผกผัน

ลาปลาซทรานฟอร์มของ $f(t)$ คือ $F(s)$ หรือ $\mathcal{L} f(t) = F(s)$ เมื่อสมการพื้นฐานของการแปลงลาปลาซย้อนกลับ แสดงดังสมการที่ (5.8)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad (5.8)$$

ยกตัวอย่างเช่นเมื่อทำการลาปลาซ $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ ดังนั้นเมื่อ การแปลงลาปลาซกลับ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$

ในทำนองเดียวกันเมื่อทำการลาปลาซ $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$ ดังนั้นเมื่อทำการแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับจะได้

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2 + a^2}\right\} = \sin at \quad (5.9)$$

ดังนั้นในการแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับสามารถทำได้โดยใช้ตารางที่ 5.2

ตารางที่ 5.2 ตารางการแปลงลาปลาซทราณฟอร์มกลับ

ลำดับที่	ฟังก์ชัน $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{k}{s}$	k
3	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
4	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin at$
5	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
6	$\frac{1}{s^2}$	t
7	$\frac{2!}{s^3}$	t^2
8	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
9	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh at$
10	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
11	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$e^{at} t^n$
12	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \sin \omega t$
13	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \cos \omega t$

ตัวอย่างที่ 5.19 จงแปลงลาปลาซทรานส์ฟอร์มกลับของฟังก์ชัน $F(s) = \frac{1}{s^2 + 9}$

วิธีทำ จากสมการที่ (5.9)

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2 + a^2}\right\} = \sin at$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 9}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 3^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2 + 3^2}\right\}$$

ตอบ $f(t) = \frac{1}{3} \sin 3t$

ตัวอย่างที่ 5.20 จงแปลงลาปลาซทรานส์ฟอร์มกลับของฟังก์ชัน

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{3s - 1}\right\} \\ &= \frac{5}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \frac{1}{3}}\right\}\end{aligned}$$

เมื่อใช้คุณสมบัติการแปลงลาปลาซทรานส์ฟอร์มกลับลำดับที่ 3 จากตารางที่ 5.2

ตอบ $f(t) = \frac{5}{3} e^{\frac{1}{3}t}$

ตัวอย่างที่ 5.21 จงแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับของฟังก์ชัน $F(s) = \frac{6}{s^3}$

วิธีทำ

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}$$

ตอบ $f(t) = 3t^2$

ตัวอย่างที่ 5.22 จงแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับของฟังก์ชัน $F(s) = \frac{7s}{s^2 + 4}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7s}{s^2 + 4}\right\} \\ &= 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 2^2}\right\}\end{aligned}$$

เมื่อใช้คุณสมบัติการแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับลำดับที่ 5 จากตารางที่ 5.2 จะได้

ตอบ $f(t) = 7 \cos 2t$

ตัวอย่างที่ 5.23 จงแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับของฟังก์ชัน $F(s) = \frac{4s}{s^2 - 16}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2 - 16}\right\} \\ &= 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - 4^2}\right\}\end{aligned}$$

เมื่อใช้คุณสมบัติการแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับลำดับที่ 10 จากตารางที่ 5.2 จะได้

ตอบ $f(t) = 4 \cosh 4t$

ตัวอย่างที่ 5.24 จงแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับของฟังก์ชัน

วิธีทำ

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2 - 7}\right\}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2 - 7}\right\} &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2 - (\sqrt{7})^2}\right\} \\ &= \frac{3}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2 - (\sqrt{7})^2}\right\}\end{aligned}$$

ตอบ $f(t) = \frac{3}{\sqrt{7}} \sinh \sqrt{7}t$

ตัวอย่างที่ 5.25 จงแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับของฟังก์ชัน $F(s) = \frac{2}{(s-3)^5}$

วิธีทำ จากตารางที่ 5.2

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\} = e^{at}t^n$$

ดังนั้น

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right\} = \frac{1}{n!}e^{at}t^n$$

และเมื่อการแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับของ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-5)^5}\right\}$ เมื่อ $n=3$ และ $a=3$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^5}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^5}\right\}$$

$$= 2 \left\{ \frac{1}{4!} e^{3t} t^4 \right\}$$

ตอบ $f(t) = \frac{1}{12} e^{3t} t^4$

5.5.2 การแปลงลาปลาซผกผันโดยวิธีแยกเศษส่วนย่อย

การแปลงลาปลาซผกผัน หรือการแปลงลาปลาซทรานส์ฟอร์มกลับ เพื่อต้องการเปลี่ยนจาก s โดเมนหรือฟังก์ชัน $F(s)$ ไปอยู่ในรูปของ t โดเมนหรือ $f(t)$ ดังนั้นสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังสมการที่ (5.10)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (5.10)$$

เมื่อ

$N(s)$ คือ จำนวนโพลีโนเมียล (Numerator Polynomial) หรือเป็นส่วนของโพล

$D(s)$ คือ ส่วนหาร (Denominator Polynomial) หรือเป็นส่วนของซีโร

ขั้นตอนในการแปลงลาปลาซทรานส์ฟอร์มกลับ

ขั้นตอนที่ 1 ทำฟังก์ชัน $F(s)$ ให้อยู่ในรูปการแยกเศษส่วนย่อย

ขั้นตอนที่ 2 ทำการลาปลาซทรานส์ฟอร์มกลับโดยใช้ตารางที่ 5.2

ดังนั้นเราสามารถพิจารณาทรานส์ฟอร์มฟังก์ชันของ $F(s)$ ได้ 3 กรณีได้แก่

(1) โพลแบบง่าย (Simple Poles)

กรณีโพลแบบง่าย (Simple Poles) คือจะเป็นโพลลำดับหนึ่ง ดังนั้นสามารถเขียนฟังก์ชันของ $F(s)$ ได้ดังสมการที่ (5.11)

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (5.11)$$

เมื่อ $s = p_1, -p_2, \dots, p_n$

จากสมการ (5.11) สามารถแยกเศษส่วนย่อยเพื่อหาค่า สัมประสิทธิ์ของ $k_1, k_2, \dots, k_n$ หรือสัมประสิทธิ์ของเศษส่วนย่อยนั่นเอง

$$F(s) = \frac{k_1}{(s + p_1)} + \frac{k_2}{(s + p_2)} + \dots + \frac{k_n}{(s + p_n)} \quad (5.12)$$

และสามารถแสดงการหาสัมประสิทธิ์ของการแยกเศษส่วนย่อยโดยคูณด้วยส่วนทั้งสองข้างดังสมการที่ (5.13)

$$(s + p_1)F(s) = k_1 \frac{(s + p_1)k_1}{(s + p_2)} + \dots + \frac{(s + p_1)k_n}{(s + p_n)} \quad (5.13)$$

เมื่อ $p_i \neq p_j$ เมื่อกำหนดให้ $s = -p_1$ ในสมการโดยเมื่อแทนค่าจะเหลือเพียงสัมประสิทธิ์ของ k_1 ในด้านขวาของสมการเท่านั้น ดังนั้นจะได้สมการที่ (5.14)

$$(s + p_1)F(s) \Big|_{s=-p_1} = k_1 \quad (5.14)$$

โดยทั่วไปสามารถเขียนสมการใหม่ได้ดังสมการที่ (5.15)

$$k_1 = (s + p_1)F(s) \Big|_{s=-p_1} \quad (5.15)$$

จากสมการข้างบนหรือเรียกอีกอย่างคือ Heaviside's theorem โดยที่ค่า k_1 สามารถนำไปแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับ ของสมการที่ (5.16)

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k}{(s + a)} \right] = ke^{-at}u(t) \quad (5.16)$$

หรือสามารถใช้การแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับได้จากตารางที่ 5.2

$$f(t) = (k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} + \dots + k_n e^{-p_n t}) \quad (5.17)$$

(2) โพลซ้ำหรือรากซ้ำ (Repeated Poles)

จากฟังก์ชัน $F(s)$ n เป็นจำนวนโพลซ้ำ ที่ $s = -p$ ดังนั้นสามารถแสดงฟังก์ชัน $F(s)$ ดังสมการ (5.18)

$$F(s) = \frac{k_n}{(s+p)^n} + \frac{k_{n-1}}{(s+p)^{n-1}} + \cdots + \frac{k_2}{(s+p)^2} + \frac{k_1}{s+p} F_1(s) \quad (5.18)$$

เมื่อ $F_1(s)$ คือส่วนที่เหลือของฟังก์ชัน $F(s)$ ที่ไม่มีโพลเมื่อ $s = -p$ เราสามารถหาตัวแปรสัมประสิทธิ์ k_n ดังสมการที่ (5.19)

$$k_n = (s+p)^n F(s) \Big|_{s=-p} \quad (5.19)$$

ดังนั้นเราสามารถหาสัมประสิทธิ์ k_n ได้ดังนี้

$$k_{n-1} = \frac{d}{ds} \left[(s+p)^n F(s) \right] \Big|_{s=-p} \quad (5.20)$$

$$k_{n-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+p)^n F(s) \right] \Big|_{s=-p} \quad (5.21)$$

และที่ลำดับ m^{th} สามารถหาค่าได้ดังสมการที่ (5.22)

$$k_{n-m} = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{ds^m} \left[(s+p)^n F(s) \right] \Big|_{s=-p} \quad (5.22)$$

เมื่อ $m = 1, 2, \dots, n-1$

และสามารถเขียนเป็นสมการการแปลงลาปลาซของรากซ้ำ

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k}{(s+p)^n} \right] = \frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!} \quad (5.23)$$

ในแต่ละเทอมของด้านขวามือของสมการที่สามารถหาได้โดย

$$f(t) = k_1 e^{-pt} + k_2 t e^{-pt} + \frac{k_3}{2!} t^2 e^{-pt} + \cdots + \frac{k_n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-pt} + f_1(t) \quad (5.24)$$

(3) กรณีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน (Complex Poles)

กรณีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (5.25)

$$F(s) = \frac{A_1 s + A_2}{s^2 + as + b} + F_1(s) \quad (5.25)$$

เมื่อ $F_1(s)$ คือส่วนที่เหลือของฟังก์ชัน $F(s)$

$$s^2 + as + b = s^2 + 2as + a^2 + \beta^2 = (s + a)^2 + \beta^2 \quad (5.26)$$

และกำหนดให้การหาค่าตัวแปรแสดงดังสมการที่ (5.27)

$$A_1 s + A_2 = A_1 (s + a)^2 + B_1 \beta \quad (5.27)$$

ดังนั้นสมการที่ (5.27) จะกลายเป็นสมการที่ (5.28)

$$F(s) = \frac{A_1 (s + a)}{(s + a)^2 + \beta^2} + \frac{B_1 \beta}{(s + a)^2 + \beta^2} + F_1(s) \quad (5.28)$$

จากตารางที่ 2 เมื่อทำการแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับจะได้ดังสมการที่ (5.29)

$$f(s) = A_1 e^{-at} \cos \beta t + B e^{-at} \sin \beta t + f_1(t) \quad (5.29)$$

ตัวอย่างที่ 5.26 จงแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับจากสมการต่อไปนี้

$$F(s) = \frac{4s - 5}{s^2 - s - 2}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{4s - 5}{s^2 - s - 2} &= \frac{A}{(s - 2)} + \frac{B}{(s + 1)} \\ &= \frac{A(s + 1) + B(s - 2)}{(s - 2)(s + 1)} \end{aligned}$$

เมื่อ

$$4s - 5 = A(s + 1) + B(s - 2)$$

เมื่อ $s = 2$

$$3 = 3A$$

$$A = 1$$

และ

เมื่อ $s = -1$

$$-9 = -3B$$

$$B = 3$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-5}{s^2-s-2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2} + \frac{3}{s+1}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+1}\right\}\end{aligned}$$

ตอบ $f(t) = e^{2t} + 3e^{-t}$

ตัวอย่างที่ 5.27 จงแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับจากสมการต่อไปนี้

$$F(s) = \frac{3}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{6}{s^2+4}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}C &= (s+3)F(s)\Big|_{s=-3} = \frac{s^2+12}{s(s+2)}\Big|_{s=-3} \\ &= \frac{9+12}{(-3)(-1)}\end{aligned}$$

$$C = 7$$

เมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์ A , B และ C จะได้

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{8}{s+2} + \frac{7}{s+3}$$

จากนั้นเมื่อทำการแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับในแต่ละเทอมจะได้คำตอบของ $f(t)$ ดังนี้

ตอบ $f(t) = 2u(t) - 8e^{-2t} + 7e^{-3t}, \quad t \geq 0$

ตัวอย่างที่ 5.28 จงหาค่า $v(t)$ จากสมการลาปลาซต่อไปนี้

$$V(s) = \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2}$$

วิธีทำ

จากค่า $V(s)$ เมื่อทำการแยกเศษส่วนย่อย

$$V(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{s+2}$$

เมื่อแยกเศษส่วนย่อยในแต่ละเทอมเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ของ A , B , C และ D จะได้

$$A = sV(s) \Big|_{s=0} = \frac{10s^2 + 4}{(s+1)(s+2)^2} \Big|_{s=0}$$

$$= \frac{4}{(1)(2)^2}$$

$$A = 1$$

$$B = (s+1)V(s) \Big|_{s=-1} = \frac{10s^2 + 4}{s(s+2)^2} \Big|_{s=-1}$$

$$= \frac{14}{(-1)(1)^2}$$

$$B = 14$$

$$C = (s+2)^2 V(s) \Big|_{s=-2} = \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)} \Big|_{s=-2}$$

$$= \frac{44}{(-2)(-1)}$$

$$C = 22$$

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{d}{ds} \left[(s+2)^2 V(s) \right] \Big|_{s=-2} \\
 &= \frac{d}{ds} \left(\frac{10s^2 + 4}{s^2 + s} \right) \Big|_{s=-2} \\
 &= \frac{(s^2 + s)(20s) - (10s^2 + 4)(2s + 1)}{(s^2 + s)^2} \Big|_{s=-2} \\
 &= \frac{52}{4} \\
 D &= 13
 \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์ของ A , B , C และ D ลงในสมการจะได้

$$V(s) = \frac{1}{s} - \frac{14}{s+1} + \frac{13}{(s+2)^2} + \frac{6}{s+2}$$

จากนั้นเมื่อทำการแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับจะได้คำตอบของ $v(t)$ ดังนี้

$$\text{ตอบ } v(t) = u(t) - 14e^{-t} + 13e^{-2t} + 22e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

ตัวอย่างที่ 5.29 จงแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับของสมการต่อไปนี้เพื่อหาค่า $h(t)$

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2 + 8s + 25)}$$

วิธีทำ ในตัวอย่างนี้พบว่าค่า $H(s)$ มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

$$s^2 + 8s + 25 = 0$$

หรือ $s = -4 \pm j3$ ดังนั้นสามารถเขียนสมการเพื่อหาค่าตัวแปร A , B และ C ดังสมการที่ (A)

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2 + 8s + 25)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs + C}{s^2 + 8s + 25} \quad (\text{A})$$

เราสามารถค่า A โดยใช้วิธีแยกเศษส่วนย่อย

$$\begin{aligned} A &= (s+2) H(s) \Big|_{s=-3} \\ &= \frac{20}{(s^2 + 8s + 25)} \Big|_{s=-3} \\ &= \frac{20}{10} \end{aligned}$$

$$A = 2$$

จากนั้นหาค่า B และ C โดยการกำหนดให้ $s = 0, 1$

เมื่อให้ $s = 0$ แล้วแทนค่าในสมการที่ (A)

$$\begin{aligned} &= \frac{20}{(0+3)(0^2 + 8(0) + 25)} = \frac{A}{0+3} + \frac{B(0) + C}{(0^2 + 8(0) + 25)} \\ \frac{20}{75} &= \frac{A}{3} + \frac{C}{25} \end{aligned} \tag{B}$$

หรือ

$$20 = 25A + 3C$$

แทนค่า $A = 2$ จะได้ค่า C

$$C = \frac{20 - 50}{3} = -10$$

และเมื่อแทน $s = 1$ แล้วแทนค่าในสมการที่ (B)

$$\begin{aligned} &= \frac{20}{(1+3)(1^2 + 8(1) + 25)} = \frac{A}{1+3} + \frac{B(1) + C}{(1^2 + 8(1) + 25)} \\ \frac{20}{(4)(34)} &= \frac{A}{4} + \frac{B+C}{25} \end{aligned}$$

หรือ

$$20 = 34A + 4B + 4C$$

แทนค่า $A = 2C = -10$ จะได้ค่า B

$$B = -2$$

ดังนั้นค่าตัวเมื่อแทนค่าตัวแปร A, B และ C ในสมการที่ (B) จะได้

$$H(s) = \frac{2}{s+3} - \frac{2s+10}{(s^2+8s+25)}$$

$$= \frac{2}{s+3} - \frac{2(s+4)+2}{(s+4)^2+9}$$

$$H(s) = \frac{2}{s+3} - \frac{2(s+4)}{(s+4)^2+9} - \frac{2}{3} \frac{3}{(s+4)^2+9}$$

จากนั้นเมื่อทำการแปลงลาปลาซทรานฟอร์มกลับ $H(s)$ จะได้คำตอบของ $h(t)$ ดังนี้

$$\text{ตอบ} \quad h(t) = 2e^{-2t} + 2e^{-4t} \cos 3t - \frac{2}{3}e^{-4t} \sin 3t$$

5.6 การแก้สมการอนุพันธ์โดยใช้ลาปลาซทรานฟอร์ม

ในหัวข้อนี้จะอธิบายการใช้ลาปลาซทรานฟอร์มในการแก้สมการอนุพันธ์ (Differential Equation) โดยมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1. ทำการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) ทั้งสองข้างของสมการ

โดยใช้สมการอนุพันธ์ดังสมการที่ (5.30)

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \\ \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} &= s\mathcal{L}\{y\} - y(0) \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

ขั้นตอนที่ 2 กำหนดค่าเริ่มต้นในสมการอนุพันธ์เช่น $y(0)$ และ $y'(0)$

ขั้นตอนที่ 3 หาค่า y โดยใช้การแปลงลาปลาซจากตารางที่ 5.2 (ตารางการแปลง 5.5 การแก้สมการอนุพันธ์โดยใช้ลาปลาซทรานส์ฟอร์ม)

ตัวอย่างที่ 5.30 จงทำการลาปลาซสมการอนุพันธ์อันดับสอง

$$2\frac{d^2 y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \text{ เมื่อกำหนดให้ } x=0, y=4 \text{ และ } \frac{dy}{dx} = 9$$

วิธีทำ

$$2\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y}{dx^2}\right\} + 5\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} - 3\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[0]$$

เมื่อแปลงลาปลาซแล้วจะได้

$$2[s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] + 5[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$$

จากโจทย์ $y(0)=4$ และ $y'(0)=9$

ดังนั้น

$$2[s^2 \mathcal{L}\{y\} - 4s - 9] + 5[s\mathcal{L}\{y\} - 4] - 3\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$2[s^2 \mathcal{L}\{y\} - 4s - 9] + 5[s\mathcal{L}\{y\} - 4] - 3\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$(2s^2 + 5s - 3)\mathcal{L}\{y\} = 8s + 38$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{8s + 38}{2s^2 + 5s - 3}$$

เมื่อทำการแปลงลาปลาซกลับจะได้

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8s + 38}{2s^2 + 5s - 3}\right]$$

$$\frac{8s + 38}{2s^2 + 5s - 3} = \frac{8s + 38}{(2s - 1)(s + 3)}$$

$$= \frac{A}{(2s-1)} + \frac{B}{(s+3)}$$

$$= \frac{A(s+3) + B(2s-1)}{(2s-1)(s+3)}$$

เมื่อ

$$8s + 38 = A(s+3) + B(2s-1)$$

$$s = \frac{1}{2}, 42 = 3 - \frac{1}{2}A$$

จากนั้นจะได้ $A = 12$

เมื่อ

$$s = -3, 14 = -7B$$

จากนั้นจะได้ $B = -2$

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{8s + 38}{2s^2 + 5s - 3} \right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{12}{2s^2 - 1} - \frac{2}{s - 3} \right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{12}{2s-1} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s+3} \right]$$

ตอบ $y = 6e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-3x}$

ตัวอย่างที่ 5.31 จงทำการลาปลาซสมการอนุพันธ์อันดับสอง

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} = 2t \quad \text{for } t > 0$$

วิธีทำ เมื่อทำการแปลงลาปลาซ

$$\left[s^2 Y(s) - sy(0-) - \frac{dy}{dt} \right] + 5 \left[sY(s) - y(0-1) \right] = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{2/s^2}{s(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^3(s+1)} = \frac{k_1}{s^3} + \frac{k_2}{s^2} + \frac{k_3}{s} + \frac{k_4}{s+1}$$

$$\frac{2}{s+1} = k_1 + k_2 + k_3 s^2 + \frac{k_4 s^3}{s+1}$$

และ

$$k_1 = 2$$

เมื่อทำการดิฟเฟอเรนเชียล เทอม d/ds ในสมการ (A) และแทน $s = 0$

$$\frac{(s+1)(0) - (2)(1)}{(s+1)^2} \bigg|_{s=0} = k_2 + 2k_3 s^2 + \frac{d}{ds} \frac{k_4 s^3}{s+1} \quad (A)$$

$$k_2 = 2$$

เมื่อทำการดิฟเฟอเรนเชียล d/ds ในสมการ (A)

$$\frac{(s+1)^2(0) - (-2)2(s+1)}{(s+1)^4} \bigg|_{s=0} = 2k_3 \quad (B)$$

และจะได้

$$k_3 = 2$$

$$k_4 = \left. \frac{2}{s^3} \right|_{s=-1} = -2$$

ตอบ $y(t) = (t^2 - 2t + 2e^{-1})u(t)$

ตัวอย่างที่ 5.32 จงทำการลาปลาซสมการอนุพันธ์อันดับสอง

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - y = e^{-t} \quad \text{for } t > 0$$

วิธีทำ เมื่อทำการแปลงลาปลาซ

$$s^2 Y(s) - Y = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2-1)}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s^2-1)} = \frac{k_1}{(s+1)^2} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s-1}$$

$$\frac{1}{s-1} = k_1 + k_2(s+1) + \frac{k_3(s+1)^2}{s-1}$$

$$k_1 = -\frac{1}{2}$$

เมื่อทำการดิฟเฟอเรนเชียล d/ds ในสมการ (A) และแทน $s = -1$ จะได้

$$\left. \frac{(s-1)(0) - (1)(1)}{(s-1)^2} \right|_{s=-1} = k_3 + 0$$

$$k_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\left. \frac{1}{(s+1)^3} \right|_{s=-1} = k_3 = \frac{1}{4}$$

เมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์ k_1 , k_2 และ k_3 จะได้

$$Y(s) = \frac{-1/2}{(s+1)} + \frac{-1/4}{s+1} + \frac{1/4}{s-1}$$

จากนั้นทำการแปลงลาปลาซเพื่อหาคำตอบ

$$y(t) = \left(-\frac{1}{2}ie^{-t} - \frac{1}{4}ie^{-t} + \frac{1}{4}ie^{+t} \right) u(t)$$

ตอบ $y(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{-t}(2t+1))u(t)$

ตัวอย่างที่ 5.33 จงทำการลาปลาซสมการอนุพันธ์อันดับสอง

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 6x = 0$$

วิธีทำ ทำการแปลงลาปลาซฟังก์ชันจากโจทย์

$$s^2 X(s) - sx(0-) - x(0-) + 3sX(s) - 3x(0-) = 0$$

$$X(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 6}$$

จากตารางที่ 5.2

$$\sin \omega_0 t = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

จะได้

$$Ae^{-\alpha t} \sin \omega_0 t = \frac{A\omega_0}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2} = \frac{A\omega_0}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \omega_0^2}$$

ดังนั้นจะได้

$$2\alpha = 3$$

$$\alpha = 1.5$$

$$\text{และ } \alpha_2 + \omega_0^2 = 6$$

$$\omega_0 = \sqrt{6 - (1.5)^2} = 1.94$$

เมื่อ

$$A\omega_0 = 3$$

$$\text{และ } A = \frac{3}{1.94} = 1.55$$

$$\text{ตอบ } x(t) = 1.55e^{-1.5t} \sin 1.94t u(t)$$

ตัวอย่างที่ 5.34 จงแก้สมการ $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}$ เมื่อ $y(0) = -3$ และ $y'(0) = 5$

วิธีทำ

$$\mathcal{L}[y'' - 3y' + 2y] = \mathcal{L}[4e^{2t}]$$

$$\mathcal{L}[y''] + 3\mathcal{L}[-y'] + 2\mathcal{L}[y] = 4\mathcal{L}[e^{2t}]$$

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y[s] = 4\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

$$[s^2 Y(s) - s(-3) - 5] - 3[sY(s) - (-3)] + 2Y[s] = \frac{4}{s-2}$$

$$Y(s)[s^2 - 3s + 2] - (14 - 3s) = \frac{4}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{4}{(s^2 - 3s + 2)(s-2)} + \frac{14-3s}{(s^2 - 3s + 2)}$$

$$Y(s) = \frac{4}{(s-1)(s-2)(s-2)} + \frac{14-3s}{(s-1)(s-2)}$$

$$= \frac{4}{(s-1)(s-2)^2} + \frac{14-3s}{(s-1)(s-2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4 + (14 - 3s)(s - 2)}{(s - 1)(s - 2)^2} \\
&= \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s - 1)(s - 2)^2} \\
\frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s - 1)(s - 2)^2} &= \frac{A}{(s - 1)} + \frac{B}{(s - 2)} + \frac{C}{(s - 2)^2} \\
A &= \left. \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s - 1)(s - 2)^2} (s - 1) \right|_{s=1} \\
&= \frac{-3 + 20 - 24}{1} \\
A &= -7
\end{aligned}$$

และจะได้ $B = 4$ และ $C = 4$

$$Y(s) = \frac{-7}{s - 1} + \frac{4}{s - 2} + \frac{4}{(s - 2)^2}$$

และเมื่อทำการแปลงลาปลาซกลับจะได้

$$\mathcal{L}^{-1}[y(s)] = -7\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]$$

ตอบ $y(t) = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}$

ตัวอย่างที่ 5.35 จงแก้สมการ $y'' - 2y' + 5y = e^{-t} \sin t$ เมื่อ $y(0) = -3$, และ $y'(0) = 1$

วิธีทำ

$$\mathcal{L}[y'' + 2y' + 5y] = \mathcal{L}[e^{-t} \sin t]$$

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 2[sY(s) - y(0)] + 5Y[s] = \frac{1}{(s - 2)^2 + 1}$$

$$[s^2 Y(s) - 1] + 2[sY(s) - 0] + 5Y[s] = \frac{1}{(s^2 + 2s + 1) + 1}$$

$$s^2 Y(s) - 1 + 2sY(s) + 5Y[s] = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$Y(s)[s^2 + 2s + 5] - 1 = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 5)(s^2 + 2s + 2)} + \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}\right]$$

ตอบ $y(t) = \frac{1}{3} e^{-t} (\sin t + \sin 2t)$

ตัวอย่างที่ 5.36 จงแก้สมการ $y'' - 9y = \cos 2t$ เมื่อ $y(0) = 1$ และ $y(\pi/2) = -1$

วิธีทำ

$$\mathcal{L}[y'' + 9y] = \mathcal{L}[\cos 2t]$$

$$\mathcal{L}[y''] + 9\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\cos 2t]$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 9Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$Y(s)[s^2 + 9] = s + c + \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$Y(s) \frac{s + c}{s^2 + 9} + \frac{s}{(s^2 + 9)(s^2 + 4)} = \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{c}{s^2 + 9} + \frac{s}{5(s^2 + 4)} + \frac{s}{5(s^2 + 9)}$$

$$= \frac{s}{s^2 + 9} \left[1 - \frac{1}{5} \right] + \frac{c}{s^2 + 9} + \frac{s}{5(s^2 + 4)}$$

$$Y(s) = \frac{4}{5} \left(\frac{s}{s^2 + 9} \right) + \frac{c}{s^2 + 9} + \frac{s}{5(s^2 + 4)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^3+3^2}\right] + \frac{c}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^3+3^2}\right] + \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right]$$

$$y(t) = \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{c}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \cos 2t$$

จากโจทย์กำหนดให้ $y(\pi/2) = -1$ และเมื่อนำไปแทนค่าจะได้

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{5} \cos\left(3 \times \frac{\pi}{2}\right) + \frac{c}{3} \sin\left(3 \times \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-1 = \frac{4}{5} (0) + \frac{c}{3} (-1) + \frac{1}{5} \cos(-1)$$

$$-1 = -\frac{c}{3} - \frac{1}{5}$$

$$-1 + \frac{1}{5} = -\frac{c}{3}$$

$$\therefore c = \frac{12}{5}$$

เมื่อแทนค่า จะได้

ตอบ $y(t) = \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{4}{5} \sin 3t + \frac{1}{5} \cos 2t$

ตัวอย่างที่ 5.37 จงแก้สมการของ $ty'' + y' + 4ty = 0$ เมื่อ $y(0) = 3$ และ $y'(0) = 0$

วิธีทำ

$$\mathcal{L}[ty'' + y' + 4ty] = 0$$

$$\mathcal{L}[ty''] + \mathcal{L}[y'] + 4\mathcal{L}[ty] = 0$$

$$\mathcal{L}[tf(t)] = \frac{d}{ds}[F(s)]$$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = F(s)$$

$$\mathcal{L}[ty''] = -\frac{d}{ds}[F(s)] = -\frac{d}{ds}[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)]$$

$$-\frac{d}{ds}[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + sY(s) - y(0) + 4\left\{-\frac{d}{ds}Y(s)\right\} = 0$$

$$-\frac{d}{ds}[s^2Y(s) - sy(0) - 0] + sY(s) - 3 - 4\frac{d}{ds}[Y(s)] = 0$$

$$-\frac{d}{ds}[s^2Y(s)] + 3\frac{d}{ds}sY(s) - 3 - 4\frac{d}{ds}[Y(s)] = 0$$

จากสมการ อนุพันธ์ผลคูณ

$$duv = u dv + v du$$

$$\frac{d}{ds}[s^2Y(s)] = s^2 \frac{d}{ds}[Y(s)] + [Y(s)] \frac{d}{ds}[s^2]$$

$$= s^2 \frac{d}{ds}[Y(s)] + 2s[Y(s)]$$

$$-\left[s^2 \frac{d}{ds}Y(s) + 2sY(s)\right] + 3 + sY(s) - 3 - 4\frac{d}{ds}[Y(s)] = 0$$

$$-s^2 \frac{d}{ds}Y(s) - 2sY(s) + sY(s) - 4\frac{d}{ds}[Y(s)] = 0$$

$$-(s^2 + 4)\frac{d}{ds}Y(s) - sY(s) = 0$$

$$(s^2 + 4)\frac{d}{ds}Y(s) - sY(s) = 0$$

เอา ds คูณตลอด

$$(s^2 + 4)dY(s) + sY(s)ds = 0$$

$$\frac{1}{Y(s)}dY(s) + \frac{s}{(s^2 + 4)}ds = 0$$

$$\int \frac{1}{Y(s)} dY(s) + \frac{1}{2} \int \frac{s}{(s^2 + 4)} d(s^2 + 4) = 0$$

$$\ln Y(s) + \ln(s^2 + 4)^{1/2} = \ln c$$

$$\ln [Y(s) (s^2 + 4)^{1/2}] = \ln c$$

$$Y(s)(s^2 + 4)^{1/2} = \ln c$$

$$Y(s) = \frac{c}{(s^2 + 4)^{1/2}}$$

จากนั้นทำการแปลงลาปลาซกลับจะได้

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = c \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 4)^{1/2}} \right]$$

$$y(t) = c J_0(2t)$$

$$y(0) = c J_0(0) = c = 3$$

ดังนั้น

ตอบ $y(t) = 3 J_0(2t)$

ตัวอย่างที่ 5.38 จงแก้สมการของ $y'' + 2y' + 5y = 0$ เมื่อ $y(0) = 3$ และ $y'(0) = -7$

วิธีทำ

$$\mathcal{L}[y'' + 2y' + 5y] = \mathcal{L}[0]$$

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 2[sY(s) - y(0)] + 5Y = 0$$

$$[s^2 Y(s) - 3s - (-7)] + 2[sY(s) - 3] + 5Y(s) = 0$$

$$s^2 Y(s) - 3s - (-7) + 2sY(s) - 6 + 5Y(s) = 0$$

$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) - 3s + 1 = 0$$

$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) = -3s + 1$$

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{-3s+1}{s^2+2s+5} \\
 &= \frac{3s-1}{(s^2+2s+1)+4} \\
 &= \frac{3s-1}{(s+1)^2+4} \\
 &= \frac{3(s-1)-4}{(s+1)^2+4} \\
 &= \frac{3(s+1)}{(s+1)^2+4} - \frac{4}{(s+1)^2+4}
 \end{aligned}$$

เมื่อทำการแปลงลาปลาซจะได้

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right] - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right]$$

$$\text{ตอบ } y(t) = 3e^{-1} \cos 2t - 2e^{-1} \sin 2t$$

$$\text{หรือ } y(t) = e^{-1} (3 \cos 2t - 2 \sin 2t)$$

ตัวอย่างที่ 5.39 จงแก้สมการของ $y''+y'=16 \cos t$ เมื่อ $y(0) = 0$ และ $y'(0) = 0$

วิธีทำ

$$\mathcal{L}[y''+y'] = \mathcal{L}[16 \cos t]$$

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + Y(s) = \frac{16s}{s^2+1}$$

$$[s^2 Y(s) - s \times 0 - 0] + Y(s) = \frac{16s}{s^2+1}$$

$$(s^2+1)Y(s) = \frac{16s}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{16s}{(s^2+1)(s^2+1)} = \frac{16s}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16s}{(s^2+1)^2}\right]$$

ตอบ $y(t) = 8 \sin t$

Copyright @2026

แบบฝึกหัดบทที่ 5

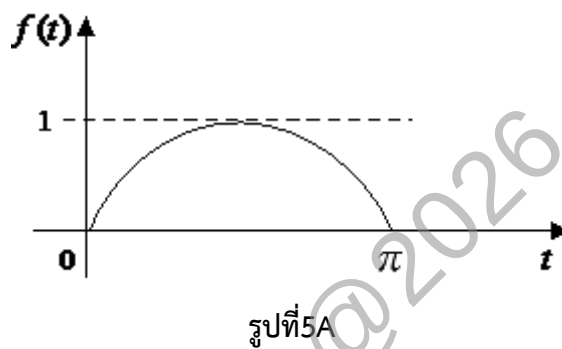
5.1 จงหาลาปลาซทรานส์ฟอร์มของฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $3e^{-2t}$

(b) $5t - 3$

(c) $10 \sin 6t$

5.2 จงหาลาปลาซทรานส์ฟอร์มของรูปคลื่นในรูป 5A



5.3 จงแปลงลาปลาซทรานส์ฟอร์มกลับของฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $\left(\frac{1}{2s-5} \right)$

(b) $\left(\frac{8s}{s^2+16} \right)$

(c) $\left(\frac{6}{s^2+4} \right)$

5.4 จงแปลงลาปลาซทรานส์ฟอร์มกลับของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้วิธีการแยกเศษส่วนย่อย

(a) $\left(\frac{3s-14}{s^2-4s+8} \right)$

(b) $\left(\frac{1}{(s+3)(s-1)} \right)$

(c) $\left(\frac{1}{(s^2+1)^3} \right)$

5.5 จงแปลงลาปลาซของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อไปนี้เมื่อ $t = 0, x = 0, y = 0$

(a) $2 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 5e^t$

(b) $\frac{dy}{dt} - 3 \frac{dx}{dt} = 5$

5.6 จงแปลงลาปลาซของสมการอนุพันธ์อันดับสอง ต่อไปนี้เมื่อ $t = 0, x = 4, y = 2$

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

(a) $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2x = y$

(b) $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2y = x$

Copyright @2026

เอกสารอ้างอิง

1. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Elementary differential equations and boundary value problems* (11th ed.). Wiley.
2. Kreyszig, E. (2020). *Advanced engineering mathematics* (11th ed.). Wiley.
3. Churchill, R. V., Brown, J. W., & Verhey, R. F. (2011). *Complex variables and applications* (9th ed.). McGraw-Hill Education.
4. Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1996). *Signals and systems* (2nd ed.). Pearson.
5. Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2021). *Modern control systems* (14th ed.). Pearson.
6. Ogata, K. (2010). *Modern control engineering* (5th ed.). Pearson.
7. Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emami-Naeini, A. (2019). *Feedback control of dynamic systems* (8th ed.). Pearson.
8. Lapidus, L. (1967). *Operational methods for chemical engineers*. McGraw-Hill.
9. Doetsch, G. (1974). *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation*. Springer-Verlag.
10. Widder, D. V. (1946). *The Laplace transform*. Princeton University Press.
11. Kamen, E. W., & Heck, B. S. (2013). *Fundamentals of signals and systems using the Web and MATLAB* (3rd ed.). Pearson.
12. Siebert, W. M. (1986). *Circuits, signals, and systems*. MIT Press.
13. Cohn, P. M. (2002). *Introduction to the theory of groups*. Courier Corporation.
14. Van Loan, C. F. (1992). *Introduction to scientific computing: A matrix-vector approach using MATLAB*. Prentice Hall.
15. Hsu, J. C., & Meyer, A. U. (1998). *Modern control principles and applications*. McGraw-Hill.

บทที่ 6

การประยุกต์ใช้ลาปลาซทรานส์ฟอร์มสำหรับวิเคราะห์ วงจรไฟฟ้า

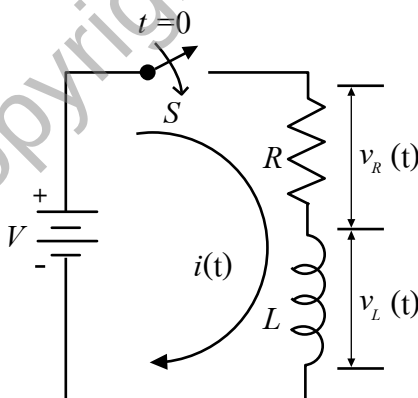
6.1 บทนำ

ในหน่วยนี้จะเป็นการประยุกต์ทฤษฎีลาปลาซในการหาค่าพารามิเตอร์ที่สำคัญในวงจรไฟฟ้า โดยเริ่มต้นการวิเคราะห์จากวงจรไฟฟ้าอย่างง่าย เช่น วงจรไฟฟ้าอันดับหนึ่ง ซึ่งประกอบด้วยโหนดแบบตัวต้านทานกับตัวเหนี่ยวนำ (RL Circuit) และแบบตัวต้านทานกับตัวเก็บประจุ (RC Circuit)

6.2 การแปลงลาปลาซกลับของวงจรไฟฟ้าอันดับหนึ่ง

6.2.1 วงจรอันดับหนึ่งสำหรับโหนด RL

การหาค่ากระแส $i(t)$ ในวงจรอนุกรม RL จากรูปที่ 6.1 ประกอบด้วยแหล่งจ่ายไฟกระแสตรง V สวิตช์ S และโหนดตัวต้านทาน R ต่อกับตัวเหนี่ยวนำ L



รูปที่ 6.1 วงจรอนุกรม RL

จากรูปที่ 6.1 สามารถเขียนแรงดันตกคร่อมแต่ละส่วน โดยใช้สมการแรงดันเคอร์ชอฟฟ์ดังสมการที่ (6.1)

$$V = v_R(t) + v_L(t) \quad (6.1)$$

เพื่อแรงดันตกคร่อม R แสดงดังสมการที่ (6.2)

$$v_R(t) = Ri(t) \quad (6.2)$$

และสมการแรงดันตกคร่อม L แสดงดังสมการที่ (6.3)

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (6.3)$$

เมื่อแทนสมการที่ (6.2) และ (6.3) ลงในสมการที่ (6.1) จะได้สมการที่ (6.4)

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (6.4)$$

เมื่อแทนสมการที่ (6.4) มาแปลงลาปลาซจะได้สมการที่ (6.5)

$$\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}\left[Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}\right] \quad (6.5)$$

หรือ

$$\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}[Ri(t)] + \mathcal{L}\left[L \frac{di(t)}{dt}\right]$$

$$\frac{V}{s} = RI(s) + L[sI(s) - i(0)]$$

$$\frac{V}{s} = RI(s) + LsI(s)$$

$$\frac{V}{s} = (R + Ls)I(s)$$

$$I(s) = \frac{V}{s(R + Ls)}$$

$$I(s) = \frac{V}{L} \frac{1}{s(R/L + s)} \quad (6.6)$$

จากสมการที่ (6.6) เมื่อนำมากระจายเศษส่วนย่อยเพื่อหาค่าคงที่ A และ B จะได้

$$\frac{1}{s(R/L + s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(R/L + s)} = \frac{A(R/L + s) + Bs}{s(s + R/L)}$$

$$\frac{1}{s(s + R/L)} = \frac{A(R/L + s) + Bs}{s(s + R/L)} \quad (6.7)$$

$$1 = As + Bs + A(R/L) \quad (6.8)$$

$$1 = (A + B)s + A(R/L) \quad (6.9)$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$A + B = 0$$

$B = -A$ เมื่อนำไปแทนในสมการที่ (6.9) จะได้สัมประสิทธิ์ A

$$1 = A(R/L)$$

$A = \frac{L}{R}$ เมื่อเอาไปแทนเพื่อหาค่า B จะได้

$$B = -\frac{L}{R}$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ A และ B แทนในสมการที่ (6.6) จะได้สมการที่ (6.10)

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{V}{L} \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{(R/L + s)} \right) \\ &= \frac{V}{L} \left(\frac{L/R}{s} - \frac{L/R}{s + R/L} \right) \\ &= \frac{V}{L} \frac{L}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right) \\ &= \frac{V}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right) \\ I(s) &= \frac{V}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right) \quad (6.10) \end{aligned}$$

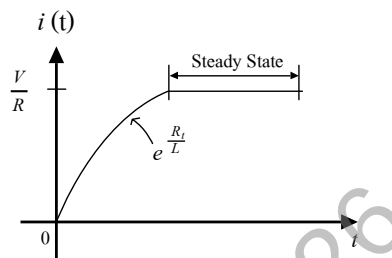
เมื่อนำสมการที่ (6.10) ทำการแปลงลาปลาซผกผัน หรือการแปลงลาปลาซกลับจะได้สมการที่ (6.11)

และสามารถแสดงผลตอบสนองของ กระแสได้ในรูปที่ 6.2

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \frac{V}{R} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L}\right]$$

$$i(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (6.11)$$

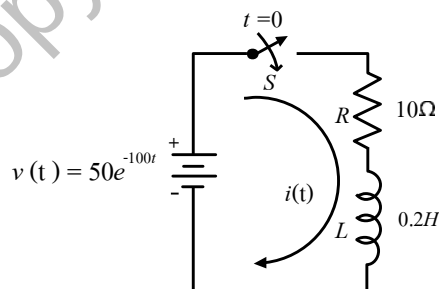
$$i(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



รูปที่ 6.2 กระแส $i(t)$ ของวงจรอนุกรม RL

ตัวอย่างที่ 6.1 จากวงในรูปที่ 6.3 จงหาค่ากระแส $i(t)$ ของวงจรอนุกรม RL เมื่อมีแรงดันที่แหล่งจ่าย $v(t) =$

$$50e^{-100t} \text{ เมื่อ } i(0) = 0$$



รูปที่ 6.3 วงจรอนุกรม RL สำหรับตัวอย่างที่ 6.1

วิธีทำ จากกฎแรงดันเคอร์ชอฟฟ์

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t)$$

หรือ

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{dt(t)}{dt}$$

$$50e^{-100t} = 10i(t) + 0.2 \frac{dt(t)}{dt}$$

เมื่อทำการลาปลาซจะได้

$$\mathcal{L}[5e^{-100t}] = \mathcal{L}\left[10i(t) + 0.2 \frac{dt(t)}{dt}\right]$$

$$50 \mathcal{L}[e^{-100t}] = 10 \mathcal{L}[i(t)] + 0.2 \left[\frac{dt(t)}{dt} \right]$$

$$\frac{50}{s+100} = 10I(s) + 0.2[sI(s) - i(0)]$$

เมื่อค่าเริ่มต้น (Initial Condition) กระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ $i(0) = 0$

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{50}{(s+100)(0.2s+10)} \\ &= \frac{50 \times 5}{(s+100)(0.2s+10) \times 5} \end{aligned}$$

$$I(s) = \frac{50}{(s+100)(s+10)}$$

เมื่อทำการหาเศษส่วนย่อย จะได้

$$I(s) = \frac{A}{(s+100)} + \frac{B}{(s+50)}$$

เมื่อหาค่า A

$$A = I(s) \times (s+100) \Big|_{s=-100}$$

$$A = \frac{250}{(s+100)(s+50)} \times (s+100) \Big|_{s=-100}$$

$$A = \frac{250}{(s+50)} \Big|_{s=-100}$$

$$A = \frac{250}{(-100 + 50)}$$

$$A = -50$$

เมื่อหาค่า B

$$B = I(s) \times (s + 50) \Big|_{s=-50}$$

$$B = \frac{250}{(s + 100)(s + 50)} \times (s + 50) \Big|_{s=-50}$$

$$B = \frac{250}{(s + 100)} \Big|_{s=-50}$$

$$B = \frac{250}{(-50 + 100)}$$

$$B = 5$$

เมื่อทำการแทนค่า A และ B จะได้

$$I(s) = \frac{-5}{(s + 100)} + \frac{5}{(s + 50)}$$

จากกรณีทำการแปลงลาปลาซกลับ

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-5}{(s + 100)} + \frac{5}{(s + 50)}\right]$$

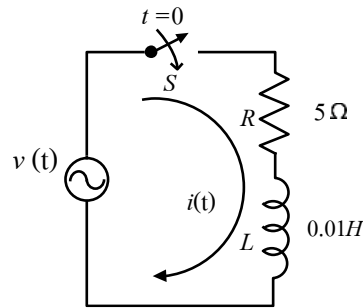
$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = -5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + 100)}\right] + 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + 50)}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = -5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-5}{(s + 100)}\right] + 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{(s + 50)}\right]$$

เมื่อเปิดตารางที่ 5.2 เพื่อแปลงลาปลาซกลับจะได้

$$\text{ตอบ} \quad i(t) = 5e^{-50t} - 5e^{-100t} \text{ A}$$

ตัวอย่างที่ 6.2 จากวงจรในรูปที่ 6.4 จงหาค่ากระแส $i(t)$ ของวงจรอนุกรม RL เมื่อมีแรงดันที่แหล่งจ่าย $v(t) = 100 \sin(500t + \theta)$ เมื่อ $\theta = 0^\circ$



รูปที่ 6.4 วงจรอนุกรม RL สำหรับตัวอย่างที่ 6.2

วิธีทำ จากกฎแรงดันเคอร์ชอฟฟ์

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t)$$

หรือ

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$100 \sin(500t + \theta) = 5i(t) + 0.01 \frac{di(t)}{dt}$$

เมื่อทำการแปลงลาปลาซ

$$\mathcal{L}[100 \sin(500t)] = \mathcal{L}\left[5i(t) + 0.01 \frac{di(t)}{dt}\right]$$

หรือ

$$\mathcal{L}[100 \sin(500t)] = 5\mathcal{L}[i(t)] + 0.1\mathcal{L}\left[\frac{di(t)}{dt}\right]$$

$$100\left(\frac{500}{s^2 + (500)^2}\right) = 5I(s) + 0.01[sI(s) - i(0)]$$

เมื่อค่ากระแสเริ่มต้น $i(0) = 0$ ดังนั้นเขียนใหม่จะได้

$$100 \left(\frac{500}{s^2 + (500)^2} \right) = 5 I(s) + 0.01 [s I(s)]$$

$$(5 + 0.01s) I(s) = \frac{5 \times 10^4}{s^2 + 25 + 10^4}$$

$$\frac{100}{100} (5 + 0.01s) I(s) = \frac{5 \times 10^4}{s^2 + 25 + 10^4}$$

$$\frac{1}{100} (500 + s) I(s) = \frac{5 \times 10^4}{s^2 + 25 + 10^4}$$

$$(500 + s) I(s) = \frac{(5 \times 10^4) 100}{s^2 + 25 + 10^4}$$

$$I(s) = \frac{5 \times 10^6}{(s^2 + 25 + 10^4)(500 + s)}$$

จากนั้นทำการแยกเศษส่วนย่อยของสมการ $I(s)$

$$I(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$I(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{5 \times 10^6}{(s^2 + 25 + 10^4)(500 + s)}$$

เมื่อ

$$s^2 + 25 \times 10^4 = 0$$

$$s^2 = -25 \times 10^4$$

$$s = \pm \sqrt{-25 \times 10^4}$$

$$s = \pm j5 \times 10^2$$

$$s = \pm j500$$

$$\therefore s^2 + 25 \times 10^4 = (s + j500)(s - j500)$$

$$I(s) = \frac{5 \times 10^6}{(s + j500)(s - j500)(s + 500)}$$

$$I(s) = \frac{A}{(s + j500)} + \frac{B}{(s - j500)} + \frac{C}{(s + 500)}$$

เมื่อ

$$N(s) = 5 \times 10^6$$

$$D(s) = (s^2 + 5 \times 10^4)(s + 500)$$

$$= s^3 + 25 \times 10^4 s + 500s^2 + 25 \times 10^4 \times 500$$

$$D'(s) = \frac{dD(s)}{ds} = 3s^2 + 25 \times 10^4 + 1000s = 3s^2 + 1000s + 25 \times 10^4$$

$$A = \left. \frac{N(s)}{D'(s)} \right|_{s=-j500} = \left. \frac{5 \times 10^6}{3s^2 + 1000s + 25 \times 10^4} \right|_{s=-j500} = -5 + j5$$

$$B = \left. \frac{N(s)}{D'(s)} \right|_{s=j500} = \left. \frac{5 \times 10^6}{3s^2 + 1000s + 25 \times 10^4} \right|_{s=j500} = -5 - j5$$

$$C = \left. \frac{N(s)}{D'(s)} \right|_{s=-500} = \left. \frac{5 \times 10^6}{3s^2 + 1000s + 25 \times 10^4} \right|_{s=-500} = 10$$

เมื่อทำการแปลงลาปลาซกลับ จะได้

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-5 + j5}{(s + j500)} + \frac{-5 - j5}{(s - j500)} + \frac{10}{(s + 500)} \right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = (-5 + j5)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + j500)}\right] + (-5 - j5)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - j500)}\right] + 10\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + 500)}\right]$$

$$i(t) = (-5 + j5)e^{-j500t} + (-5 - j5)e^{-j500t} + 10e^{-500t}$$

$$i(t) = -5e^{-j500t} + j5e^{-j500t} - 5e^{j500t} - j5e^{j500t} + 10e^{-500t}$$

จากสมการตรีโกณมิติ

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta &= \frac{(e^{j\theta} + e^{-j\theta})}{2} \\ \sin\theta &= \frac{(e^{j\theta} - e^{-j\theta})}{2j} \end{aligned} \right\}$$

$$i(t) = -10 \frac{(e^{j500t} + e^{-j500t})}{2} + 10 \frac{(e^{j500t} - e^{-j500t})}{j2} + 10e^{-500t}$$

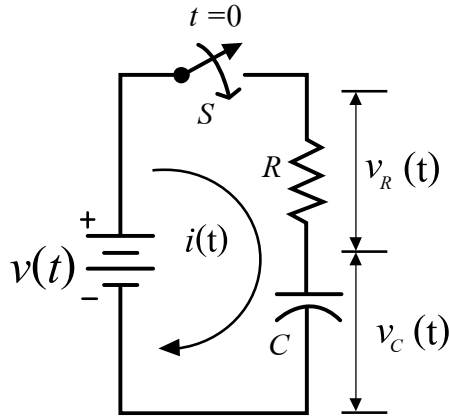
$$i(t) = -10\cos(500t) + 10\sin(500t) + 10e^{-500t}$$

หรือ

$$\text{ตอบ} \quad i(t) = 10e^{-500t} + 1.414\sin(500t - \pi/4)A$$

6.2.2 วงจรอันดับหนึ่งสำหรับโหลด RC

การหาค่ากระแส $i(t)$ วงจรไฟฟ้าอนุกรม RC แสดงดังรูปที่ 6.5 มีแหล่งจ่าย V และมีค่าแรงดันสะสมที่ตัวเก็บประจุ (Initial voltage condition)



รูปที่ 6.5 อนุกรม RC

จากกฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์เมื่อแรงดันตกคร่อมโหนดแต่ละตัวรวมกันจะเท่ากับแรงดันที่แหล่งจ่าย

$$v_R(t) + v_C(t) = v(t) \quad (6.12)$$

เมื่อแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (6.13)$$

เมื่อแทนค่าสมการที่ (6.13) ในสมการที่ (6.12) จะได้

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t) \quad (6.14)$$

$$v_R(t) = Ri(t) \quad (6.15)$$

หรือ

$$v_C(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (6.16)$$

เมื่อทำการลาปลาซ สมการที่ (6.16)

$$\mathcal{L}[v(t)] = \mathcal{L}\left[Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt\right]$$

$$\mathcal{L}[v(t)] = \mathcal{L}[Ri(t)] + \mathcal{L}\left[\frac{1}{C} \int i(t) dt\right]$$

$$\left[\frac{V(s)}{s} \right] = R[I(s)] + \frac{1}{C} \left[\frac{I(s)}{s} + \frac{f(0^+)}{s} \right] \quad (6.17)$$

เมื่อ $f(0^+)$ คือกระแสเมื่อ ค่า q_0 ก่อนที่ปิดสวิตช์ S ซึ่งมีค่าดังนี้

$$q_0 = CV_c$$

$$f(0^+) = q_0 = CV_c = C \left(\frac{1}{C} \int i(t) dt \Big|_{0^+} \right) = \int i(t) dt \Big|_{0^+}$$

$$\frac{V(s)}{s} = \left(R + \frac{1}{Cs} \right) I(s) + \frac{q_0}{Cs}$$

$$\frac{V(s)}{s} - \frac{q_0}{Cs} = \left(\frac{RCs + 1}{Cs} \right) I(s)$$

$$\frac{1}{s} \left(V(s) - \frac{q_0}{C} \right) = \left(\frac{RCs + 1}{Cs} \right) I(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{\cancel{s}} \left(V(s) - \frac{q_0}{C} \right) \left(\frac{Cs}{RCs + 1} \right)$$

$$I(s) = \left(V(s) - \frac{q_0}{C} \right) \left(\frac{Cs}{RCs + 1} \right)$$

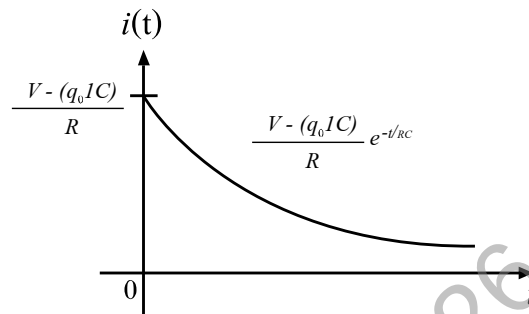
$$= \left(V(s) - \frac{q_0}{C} \right) \left(\frac{C}{RC \left(s + \frac{1}{RC} \right)} \right)$$

$$= \frac{1}{R} \left(V(s) - \frac{q_0}{C} \right) \left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right) \quad (6.18)$$

เมื่อทำการแปลงลาปลาซกลับของสมการที่ (6.18)

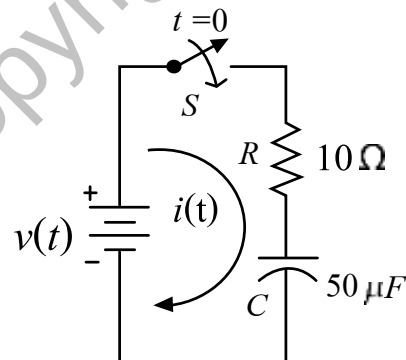
$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{R}\left(V(s) - \frac{q_0}{C}\right)\left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right)\right]$$

การแปลงลาปลาซกลับโดยใช้ตารางที่ 5.2 จะได้คำตอบ และแสดงผลตอบสนองของกระแส $i(t)$ ได้ดังรูปที่ 6.6



รูปที่ 6.6

ตัวอย่างที่ 6.3 จากรูปที่ 6.7 เป็นวงจรอนุกรม RC และสวิตช์ปิดที่เวลา $t = 0$ จงคำนวณหาค่ากระแส $i(t)$ เมื่อแหล่งจ่ายแรงดัน $v(t) = 100 \text{ V}$ เมื่อตัวเก็บประจุมีค่าเริ่มต้น $q_0 = 2500 \text{ } \mu\text{C}$



รูปที่ 6.7 สำหรับตัวอย่างที่ 6.3

วิธีทำ จากกฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์

$$v(t) = v_R(t) + v_C(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

เมื่อแทนค่าจะได้

$$100 = 10i(t) + \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \int i(t) dt$$

จากสมการที่เมื่อแปลงลาปลาซ

$$\mathcal{L}[100] = 10\mathcal{L}[i(t)] + \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \mathcal{L}\left[\int i(t) dt\right]$$

$$\frac{100}{s} = 10 I(s) + \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \left[\frac{I(s)}{s} + \frac{q_0}{s} \right]$$

เมื่อประจุ q_0 มีค่าตรงข้ามกับขั้วของตัวเก็บประจุตั้งนั้น $q_0 = 2500 \mu C$

$$\frac{100}{s} = 10 I(s) + \frac{I(s)}{50 \times 10^{-6}} + \frac{2500 \times 10^{-6}}{50 \times 10^{-6} s}$$

$$\left[10 + \frac{1}{50 \times 10^{-6} s} \right] I(s) = \frac{100}{s} + \frac{2500 \times 10^{-6}}{50 \times 10^{-6} s}$$

$$\left[\frac{1 \times 50 \times 10^{-6} s + 1}{50 \times 10^{-6} s} \right] I(s) = \frac{100}{s} + \frac{50}{s}$$

$$\left[\frac{5 \times 10^{-4} s + 1}{50 \times 10^{-6} s} \right] I(s) = \frac{100 + 50}{s}$$

$$\left[\frac{10^6 (5 \times 10^{-4} s + 1)}{50 s} \right] I(s) = \frac{150}{s}$$

$$\left[\frac{10 s + 2 \times 10^4}{s} \right] I(s) = \frac{150}{s}$$

$$I(s) = \frac{150}{s} \frac{s}{10 s + 2 \times 10^4}$$

$$= \frac{150}{10(s + 2 \times 10^4)}$$

$$I(s) = \frac{15}{s + 2 \times 10^4}$$

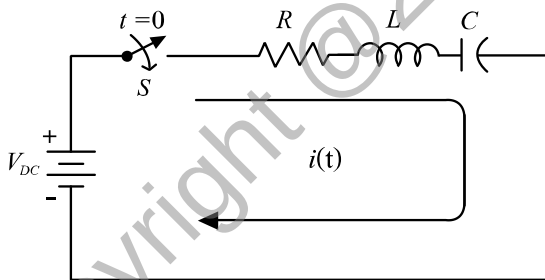
เมื่อทำการแปลงลาปลาซกลับ

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{15}{s + 2 \times 10^3}\right]$$

ตอบ $i(t) = 15e^{-2 \times 10^3 t} \text{ A}$

6.3 การประยุกต์ใช้ลาปลาซทรานส์ฟอร์มสำหรับวงจรไฟฟ้าวงจรอันดับสอง

ในหัวข้อนี้จะเป็นการคำนวณหาค่ากระแสในวงจรอันดับสอง ที่ประกอบด้วยภาระทางไฟฟ้า ได้แก่ ตัวต้านทาน (Resistor) ตัวเหนี่ยวนำ (Inductor) และตัวเก็บประจุ (Capacitor) ที่ต่อแบบอนุกรมดังรูปที่ 6.8



รูปที่ 6.8 วงจรอนุกรม RLC

จากวงจรในรูปที่ 6.8 เมื่อปิดสวิตช์ และเข้าสู่สภาวะคงตัว สามารถเขียนสมการแรงดันตกคร่อมพารามิเตอร์ ได้โดยใช้กฎแรงดันเคอร์ชอฟฟ์ดังสมการที่ (6.19) และ (6.20)

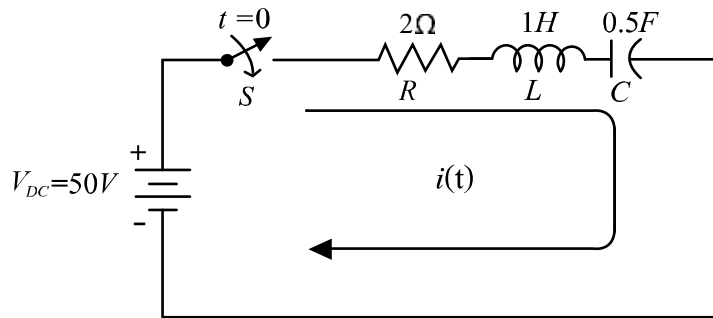
$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = V_{DC} \quad (6.19)$$

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V_{DC} \quad (6.20)$$

เมื่อทำการแปลงลาปลาซสมการ (6.21) จะได้

$$R\mathcal{L}[i(t)] + L\mathcal{L}\left[\frac{di(t)}{dt}\right] + \frac{1}{C} \mathcal{L}\left[\int i(t) dt\right] = \mathcal{L}[V_{DC}] \quad (6.21)$$

ตัวอย่างที่ 6.4 จากวงจรอนุกรม RLC ในรูปที่ 6.9 จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจร



รูปที่ 6.9 วงจรไฟฟ้าอนุกรม RLC สำหรับตัวอย่าง 6.4

วิธีทำ จากกฎแรงดันเคอร์ชอฟฟ์ เมื่อแรงดันตกคร่อมในวงจร คือ

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = V_{DC}$$

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V_{DC}$$

เมื่อทำการแปลงลาปลาซ จะได้

$$R\mathcal{L}[i(t)] + L\mathcal{L}\left[\frac{di(t)}{dt}\right] + \frac{1}{C}\mathcal{L}\left[\int i(t) dt\right] = \mathcal{L}[V_{DC}]$$

เมื่อแทนค่า

$$2\mathcal{L}[i(t)] + (1)\mathcal{L}\left[\frac{di(t)}{dt}\right] + \frac{1}{0.5}\mathcal{L}\left[\int i(t) dt\right] = \mathcal{L}[50]$$

$$2I(s) + [sI(s) - i(0^+)] + \frac{1}{0.5}\left[\frac{I(s)}{s} + \frac{q_0}{s}\right] = \frac{50}{s}$$

เมื่อกระแสเริ่มต้นของขดลวด $i(0) = 0$ และค่าประจุเริ่มต้นของตัวเก็บประจุ $q_0 = 0$ ดังนั้นสามารถเขียนใหม่ได้

$$2I(s) + [sI(s)] + \frac{1}{0.5}\left[\frac{I(s)}{s}\right] = \frac{50}{s}$$

$$\left[2 + s + \frac{1}{0.5}\right] I(s) = \frac{50}{s}$$

$$\left[\frac{s + 0.5s^2 + 1}{0.5s}\right] I(s) = \frac{50}{s}$$

$$I(s) = \frac{50}{s} \frac{0.5s}{s + 0.5s^2 + 1}$$

$$= \frac{50}{s^2 + 2s + 1}$$

$$= \frac{50}{(s + 1 + j)(s + 1 - j)}$$

$$I(s) = \frac{50}{(s + 1 + j)(s + 1 - j)}$$

$$\frac{50}{(s + 1 + j)(s + 1 - j)} = \frac{A}{(s + 1 + j)} + \frac{B}{(s + 1 - j)}$$

จากนั้นหาค่าสัมประสิทธิ์ A และ B

$$50 = A(s + 1 - j) + B(s + 1 + j)$$

$$50 = (A - jA + B + jB) + (A + B)s$$

$$A + B = 0$$

$$B = -A$$

$$50 = A - jA + B + jB$$

$$50 = -j2A$$

$$A = \frac{50}{-j2} = j25$$

ดังนั้น

$$B = -j25$$

และเมื่อแทนสัมประสิทธิ์ A และ B จะได้

$$I(s) = \frac{j25}{(s+1+j)} + \frac{-j25}{(s+1-j)}$$

จากนั้นทำการแปลงลาปลาซกลับเพื่อหาค่ากระแสในรูปของเวลา

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[I(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{j25}{(s+1+j)} + \frac{-j25}{(s+1-j)}\right] \\ &= j25\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(1+j)}\right] - j25\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(1-j)}\right]\end{aligned}$$

$$i(t) = j25(e^{-t}e^{-jt} - e^{-t}e^{jt})$$

$$i(t) = -j25(e^{-jt} - e^{jt})e^{-t}$$

$$i(t) = -j25 \times j2 \times \frac{1}{j2}(e^{-jt} - e^{jt})e^{-t}$$

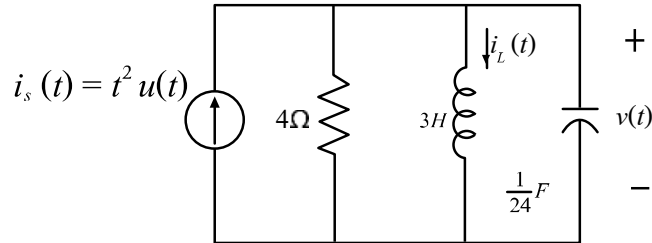
$$i(t) = -50(j)^2 \sin(t)e^{-t}, (j)^2 = -1$$

ตอบ

$$i(t) = -50e^{-t} \sin t$$

ตัวอย่าง 6.5 จากวงจรในรูปที่ 6.10 จงหาค่าแรงดัน $v_0(t)$ เมื่อกำหนดให้

$$v(0+) = 4V, i_L(0+) = 1A, i_s(t) = t^2 u(t), R = 4\Omega, L = 3H \text{ และ } C = \frac{1}{24}F$$



รูปที่ 6.10 วงจรขนาน RLC

วิธีทำ จากสมการอยู่ในรูปของโดเมนเวลา

$$\begin{aligned} \frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v dt + C \frac{dv}{dt} &= i_s(t) \\ \frac{v}{4} + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^t v dt + \frac{1}{24} \frac{dv}{dt} &= i^2 \text{ สำหรับ } t > 0 \end{aligned} \quad (A)$$

เมื่อทำการแปลงลาปลาซ ของสมการ (A) จะได้สมการ (B)

$$\frac{V(s)}{4} + \frac{1}{3} \frac{V(s)}{s} + \frac{1}{3} \frac{\int_{-\infty}^{0-} v dt}{s} + \frac{1}{24} [sV(s) - v(0-)] = \frac{2}{s^3} \quad (B)$$

เมื่อแทนค่าเริ่มต้น

$$\frac{1}{3} \int_{-\infty}^{0-} v dt = i_L(0-)$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3s} + \frac{s}{24} \right) V(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{1}{6}$$

$$V(s) = \frac{24s(2/s^3 - 1/s + 1/6)}{s^2 + 6s + 8} \quad (C)$$

$$V(s) = \frac{48/s^2}{(s+2)(s+4)} + \frac{4s-24}{(s+2)(s+4)} = V_{zs}(s) + V_{zt}(s) \quad (D)$$

เมื่อ $V_{zs}(s)$ และ $V_{zi}(s)$ เป็นพจน์ลาปลาซของผลตอบสนองซีโรสเตต (Zero-state response) และผลตอบสนองซีโรอินพุต (Zero-input response)

$$V_{zs}(s) = \frac{k_1}{s^2} + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{s+2} + \frac{k_4}{s+4}$$

$$\left. \frac{48}{(s+2)(s+4)} \right|_{s=0} = k_1 + k_2 s + \frac{k_3 s^2}{s+2} + \frac{k_4 s^2}{s+4}$$

ดังนั้น จะได้

$$k_1 = 6$$

และเมื่อทำการอนุพันธ์ d/ds และแทน $s = 0$

$$\left. \frac{(s^2 + 6s + 6s) - 48(2s + 6)}{(s^2 + 6s + 6s)^2} \right|_{s=0} = k_2$$

ดังนั้น จะได้

$$k_2 = \frac{9}{2}$$

$$\left. \frac{48}{s^2(s+4)} \right|_{s=2} = k_3$$

$$k_3 = 6$$

และ

$$\left. \frac{48}{s^2(s+4)} \right|_{s=4} = k_4$$

ดังนั้น จะได้

$$k_4 = -\frac{3}{2}$$

ดังนั้น

$$v_{zs}(t) = \left(6t - \frac{9}{2} + 6e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-4t} \right) u(t)$$

สำหรับ $V_{zi}(s)$

$$\frac{4s - 24}{(s + 2)(s + 4)} = \frac{k_1}{s + 2} + \frac{k_2}{s + 4}$$

เมื่อ

$$\left. \frac{4s - 24}{s + 4} \right|_{s = -2} = k_1$$

$$k_1 = -16$$

และ

$$\left. \frac{4s - 24}{s + 2} \right|_{s = -4} = k_2$$

$$k_2 = 20$$

ดังนั้น

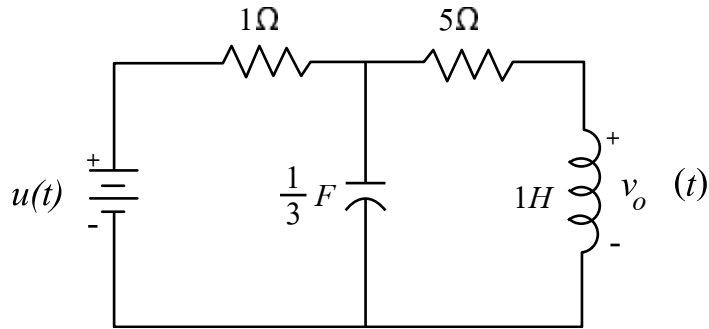
$$v_{zi}(t) = \left(-16e^{-2t} + 20e^{-4t} \right) u(t)$$

ดังนั้นสามารถเขียนคำตอบแบบสมบูรณ์ (Complete response) คือ

$$v(t) = v_{zs}(t) + v_{zi}(t)$$

ตอบ
$$v(t) = \left(6t - \frac{9}{2} - 10e^{2t} + \frac{37}{2}e^{-4t} \right) u(t)$$

ตัวอย่างที่ 6.6 จากวงจรในรูปที่ 6.11 จงหาค่าแรงดัน $v_o(t)$



รูปที่ 6.11

วิธีทำ ขั้นแรกทำการแปลงลาปลาซ ตัวแปร

$$u(t) = \frac{1}{s}$$

$$L = 1H = sL = s$$

$$C = \frac{1}{3}F = \frac{1}{sC} = \frac{3}{s}$$

จากนั้นตั้งสมการ กระแสโดยใช้หลักการเมช (Mesh current method)

สำหรับสมการเมชที่ 1

$$\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right)I_1 - \frac{3}{s}I_2 \quad (A)$$

สำหรับสมการเมชที่ 2

$$0 = -\frac{3}{s}I_1 + \left(s + 5 + \frac{3}{s}\right)I_2$$

หรือ

$$I_1 = \frac{1}{3}(s^2 + 5s + 3)I_2 \quad (B)$$

และเมื่อนำไปแทนในสมการ (A)

$$\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right) \frac{1}{3} (s^2 + 5 + 3) I_2 - \frac{3}{s} I_2$$

และเมื่อคูณด้วย $3s$ จะได้

$$3 = (s^3 + 8s^2 + 18s) I_2$$

$$I_2 = \frac{3}{s^3 + 8s^2 + 18s}$$

จากสมการแรงดัน

$$V_0(s) = sI_2$$

$$= \left(\frac{3}{s^3 + 8s^2 + 18s} \right) s$$

$$= \frac{3}{s^2 + 8s + 18}$$

หรือ

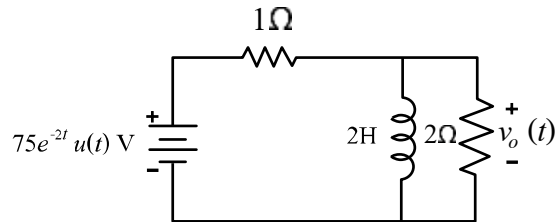
$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(s+4)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

และเมื่อแปลงลาปลาซกลับจะได้

ตอบ
$$v_0(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-4t} \sin \sqrt{2}t \text{ V}$$

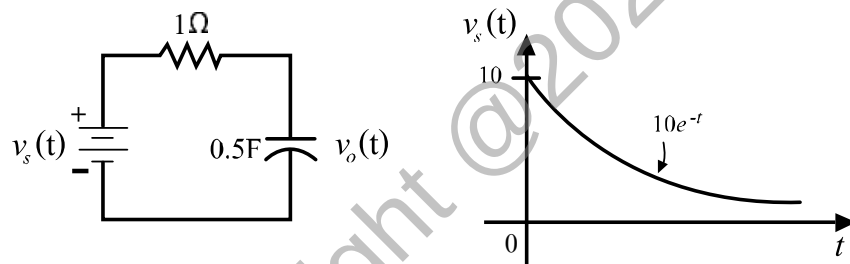
แบบฝึกหัดบทที่ 6

6.1 จากวงจรรูปที่ 6A จงหาค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ $v_o(t)$ โดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซทรานฟอร์ม



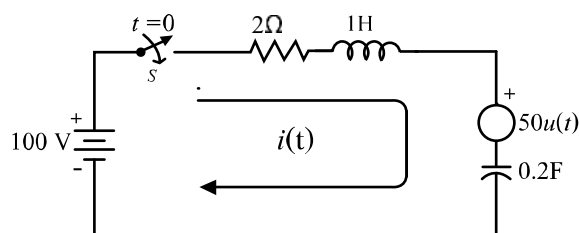
รูปที่ 6A

6.2 จากวงจรรูปที่ 6B จงหาค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ $v_o(t)$ โดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซทรานฟอร์ม



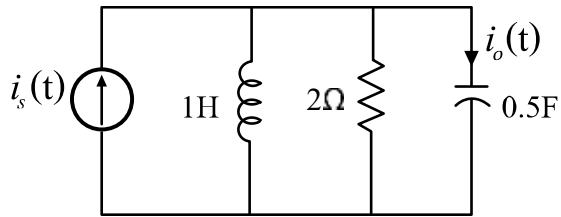
รูปที่ 6B

6.3 จงคำนวณหาค่า $i(t)$ จากวงจรในรูปที่ 6C โดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซทรานฟอร์ม



รูปที่ 6C

6.4 จากรูปที่ 6D จงหาค่ากระแส $i_o(t)$ เมื่อ $i_s(t) = e^{-2t}u(t)$



รูปที่ 6D

Copyright @2026

เอกสารอ้างอิง

1. Dorf, R. C., & Svoboda, J. A. (2022). *Introduction to electric circuits* (10th ed.). Wiley.
2. Alexander, C. K., & Sadiku, M. N. O. (2020). *Fundamentals of electric circuits* (6th ed.). McGraw-Hill.
3. Nilsson, J. W., & Riedel, S. (2021). *Electric circuits* (11th ed.). Pearson.
4. Kamen, E. W., & Heck, B. S. (2013). *Fundamentals of signals and systems using the Web and MATLAB* (3rd ed.). Pearson.
5. Siebert, W. M. (1986). *Circuits, signals, and systems*. MIT Press.
6. Van Valkenburg, M. E. (2014). *Network analysis* (3rd ed.). Pearson.
7. Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emami-Naeini, A. (2019). *Feedback control of dynamic systems* (8th ed.). Pearson.
8. Ogata, K. (2010). *Modern control engineering* (5th ed.). Pearson.
9. Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2021). *Modern control systems* (14th ed.). Pearson.
10. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Elementary differential equations and boundary value problems* (11th ed.). Wiley.
11. Widder, D. V. (1946). *The Laplace transforms*. Princeton University Press.
12. Doetsch, G. (1974). *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation*. Springer-Verlag.
13. Hsu, J. C., & Meyer, A. U. (1998). *Modern control principles and applications*. McGraw-Hill.
14. Poularikas, A. D. (2010). *Transforms and applications handbook* (3rd ed.). CRC Press.
15. Brigham, E. O. (1988). *The fast Fourier transform and its applications*. Prentice-Hall.

บรรณานุกรม

1. Alexander, C. K., & Sadiku, M. N. O. (2020). *Fundamentals of electric circuits* (6th ed.). McGraw-Hill Education.
2. Boylestad, R. L. (2023). *Introductory circuit analysis* (14th ed.). Pearson.
3. Dorf, R. C., & Svoboda, J. A. (2022). *Introduction to electric circuits* (10th ed.). Wiley.
4. Hayt, W. H., Kemmerly, J. E., & Durbin, S. M. (2019). *Engineering circuit analysis* (9th ed.). McGraw-Hill Education.
5. Chapman, S. J. (2017). *Electric machinery fundamentals* (5th ed.). McGraw-Hill Education.
6. Leon-Garcia, A. (2018). *Probability, statistics, and random processes for electrical engineering* (4th ed.). Pearson.
7. Karris, S. T. (2019). *Mathematical models of electrical network systems and their applications* (2nd ed.). Orchard Publications.
8. Van Valkenburg, M. E. (2014). *Network analysis* (3rd ed.). Pearson.
9. Nilsson, J. W., & Riedel, S. (2021). *Electric circuits* (11th ed.). Pearson.
10. Fawwaz, T. U., & Cain, G. (2018). *Electromagnetic fields* (2nd ed.). McGraw-Hill.
11. Kreyszig, E. (2020). *Advanced engineering mathematics* (10th ed.). Wiley.
12. Zill, D. G., & Wright, W. S. (2018). *Advanced engineering mathematics* (6th ed.). Jones & Bartlett Learning.
13. Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2017). *Mathematical methods for physicists: A comprehensive guide* (7th ed.). Academic Press.
14. Griffiths, D. J. (2017). *Introduction to electrodynamics* (4th ed.). Cambridge University Press.
15. Kreyszig, E. (2019). *Advanced engineering mathematics* (11th ed.). Wiley.
16. Spiegel, M. R., Lipschutz, S., Schiller, J. J., & Spellman, D. (2009). *Vector analysis* (2nd ed.). McGraw-Hill Education.
17. Zill, D. G. (2018). *Differential equations with boundary-value problems* (9th ed.). Cengage Learning.

18. Anton, H., & Rorres, C. (2019). *Elementary linear algebra: Applications version* (12th ed.). Wiley.
19. Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2020). *Linear algebra and its applications* (6th ed.). Pearson.
20. Boas, M. L. (2020). *Mathematical methods in the physical sciences* (3rd ed.). Wiley.
21. Jackson, J. D. (2021). *Classical electrodynamics* (3rd ed.). Wiley.
22. Taylor, J. R. (2005). *Classical mechanics*. University Science Books.
23. Bracewell, R. N. (2000). *The Fourier transform and its applications* (3rd ed.). McGraw-Hill.
24. Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1996). *Signals and systems* (2nd ed.). Pearson.
25. Papoulis, A. (2018). *The Fourier integral and its applications*. Dover Publications.
26. Oppenheim, A. V., & Schaffer, R. W. (2014). *Discrete-time signal processing* (3rd ed.). Pearson.
27. Proakis, J. G., & Manolakis, D. G. (2022). *Digital signal processing: Principles, algorithms, and applications* (5th ed.). Pearson.
28. Vetterli, M., Kovacevic, J., & Goyal, V. K. (2014). *Foundations of signal processing*. Cambridge University Press.
29. Rathinasamy, S. (2016). *Signals and systems* (2nd ed.). McGraw-Hill.
30. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Elementary differential equations and boundary value problems* (11th ed.). Wiley.
31. Kreyszig, E. (2020). *Advanced engineering mathematics* (11th ed.). Wiley.
32. Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emami-Naeini, A. (2019). *Feedback control of dynamic systems* (8th ed.). Pearson.
33. Siebert, W. M. (1986). *Circuits, signals, and systems*. MIT Press.
34. Cohn, P. M. (2002). *Introduction to the theory of groups*. Courier Corporation.
35. Dorf, R. C., & Svoboda, J. A. (2022). *Introduction to electric circuits* (10th ed.). Wiley.
36. Alexander, C. K., & Sadiku, M. N. O. (2020). *Fundamentals of electric circuits* (6th ed.). McGraw-Hill.
37. Nilsson, J. W., & Riedel, S. (2021). *Electric circuits* (11th ed.). Pearson.
38. Van Valkenburg, M. E. (2014). *Network analysis* (3rd ed.). Pearson.

39. 7. Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emami-Naeini, A. (2019). *Feedback control of dynamic systems* (8th ed.). Pearson.
40. Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2021). *Modern control systems* (14th ed.). Pearson.
41. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Elementary differential equations and boundary value problems* (11th ed.). Wiley.

Copyright @2026

ดัชนี

A

Amplitude, 109

C

Complex Number, 1

Conjugate, 13

Complex Poles, 168

Capacitor, 205

D

Denominator, 13

Denominator Polynomial, 166

Differential Equation, 174

F

Fourier Series, 69

I

Imaginary Part, 1

Inverse Fourier Transform, 109

Initial Voltage Condition, 200

Inductor, 205

N

Numerator, 13

L

Laplace Transform, 154, 174

P

Polar Form, 1, 12

Periodic Function, 69, 100

R

Rectangular Form, 1

Real Part, 1

Resultant, 41

Repeated poles, 167

RC Circuit

Resistor, 205

Ralf-Rang

S

Scalar, 32

Signum Function, 128

Sampling, 141

T

Transform Pair, 109

Time Integration, 121

U

Unit Step Function, 125

V

Vector, 32

ประวัติผู้เรียบเรียง

ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญทัน ศรีบุญเรือง



การศึกษา

- ปริญญาตรีวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ในปี 2537
- ปริญญาโทครุศาสตรบัณฑิต สาขาไฟฟ้า จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ในปี 2540

ปัจจุบัน

- ดำรงตำแหน่งผู้ช่วยศาสตราจารย์ สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาครุศาสตร์อุตสาหกรรม คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

วิชาที่มีความเชี่ยวชาญพิเศษ

- Electrical system Design, Electrical Engineering Mathematics, Electrical Control Motor, Resonant inverter application

**ELECTRICAL
ENGINEERING
MATHEMATICS**

คณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า

ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญกัน ศรีบุญเรือง
สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

Copyright © 2026